

# Análisis de la estabilidad lineal de una micro celda térmica

---

Trabajo Final de Máster

Gonzalo Sisó Soler

10/Julio/2017

## Índice General

1.	Listado de figuras .....	1
2.	Listado de tablas.....	2
3.	Introducción .....	3
3.1	Resumen.....	3
3.2	Antecedentes .....	3
3.3	Descripción del dispositivo.....	4
4.	Objetivos .....	7
4.1	Objetivos generales.....	7
4.2	Objetivos específicos.....	7
5.	Material y métodos utilizados.....	8
6.	Análisis.....	9
6.1	Estrategia de resolución.....	9
6.2	Modelo teórico empleado.....	9
6.3	Descripción de la válvula térmica.....	10
7.	Resolución .....	12
7.1	Cálculo de la solución estacionaria .....	12
7.2	Análisis de la estabilidad lineal.....	15
7.2.1	Análisis de la estabilidad en función del flujo de calor. ....	17
7.2.2	Análisis de la estabilidad en función de la pendiente de la válvula. ....	19
7.2.3	Análisis de la estabilidad en función de la velocidad crítica, temperatura crítica y flujo de calor.....	21
7.3	Ejemplo de cálculo por EDOS .....	24
8.	Discusión .....	26
9.	Conclusiones.....	27
10.	Bibliografía .....	28
11.	Anejo A .....	29
11.1	Cálculo del coeficientes de convección de la micro celda y el coeficiente de arrastre con los datos obtenidos de simulaciones mediante software de elementos finitos.....	29
11.2	Aproximación de $h_b$ .....	40
11.3	Aproximación de $h_f$ .....	42
12.	Anejo B .....	44

12.1	Código VBA utilizado en la resolución.....	44
13.	Anejo C .....	48
13.1	Obtención de la curva de la válvula .....	48
14.	Anejo D.....	50
14.1	Plano de la micro celda .....	50
14.2	Plano de la válvula.....	51
14.3	Plano de montaje .....	52

## 1. Listado de figuras

Figura 1: Micro celda utilizada durante el estudio.....	4
Figura 2: Imagen de la micro celda con transparencias donde se aprecian los micro canales.....	5
Figura 3: Válvula térmica y posición según temperatura.....	6
Figura 4: Imagen de la micro celda con la micro válvula montada en la ranura de salida. ....	6
Figura 5: Gráfica de la válvula térmica .....	10
Figura 6: Resultados de temperatura media de la micro celda y del fluido en la solución estacionaria para varios flujos de calor.....	13
Figura 7: Temperatura media de la celda para la solución estacionaria en función de varios flujos de calor.....	14
Figura 8: Determinante y discriminante en función del flujo de calor. ....	17
Figura 9: Representación de la parte real de los valores propios del sistema en función del flujo de calor.....	18
Figura 10: Parte imaginaria de los valores propios en función del flujo de calor. ....	18
Figura 11: Representación del determinante y el discriminante en función de la derivada de la válvula. ....	19
Figura 12: representación de los valores de lambda obtenidos. ....	20
Figura 13: representación de la parte imaginaria. ....	20
Figura 14: Curvas de inicio de inestabilidades para diversas Temperaturas Críticas, Velocidades críticas y flujos de calor. ....	22
Figura 15: Solución estacionaria para uno de los puntos inestables .....	23
Figura 16: Micro celda seccionada por la mitad. ....	24
Figura 17: Curva $h_b(vf)$ para $P=10 \text{ W/cm}^2$ .....	30
Figura 18: Curva $h_f(vf)$ para $P=10 \text{ W/cm}^2$ . ....	31
Figura 19: Curva $h_b(vf)$ para $P=50 \text{ W/cm}^2$ .....	32
Figura 20: Curva $h_f(vf)$ para $P=50 \text{ W/cm}^2$ . ....	33
Figura 21: Curva $h_b(vf)$ para $P=80 \text{ W/cm}^2$ .....	34
Figura 22: Curva $h_f(vf)$ para $P=80 \text{ W/cm}^2$ . ....	34
Figura 23: Curva $h_b(vf)$ para $P=100 \text{ W/cm}^2$ .....	35
Figura 24: Curva $h_f(vf)$ para $P=100 \text{ W/cm}^2$ . ....	36
Figura 25: Curva $h_b(vf)$ para $P=200 \text{ W/cm}^2$ .....	37
Figura 26: Curva $h_f(vf)$ para $P=200 \text{ W/cm}^2$ . ....	38
Figura 27: Curva $h_b(vf)$ para $P=300 \text{ W/cm}^2$ .....	39
Figura 28: Curva $h_f(vf)$ para $P=300 \text{ W/cm}^2$ . ....	39
Figura 29: Coeficientes $h_b(vf)$ para cada flujo de calor.....	40
Figura 30: Representación del primer término de las curvas de cada flujo de calor.....	41
Figura 31: Aproximación del segundo término de las curvas de cada flujo de calor.....	41
Figura 32: Representación de la curva $h_f(vf)$ de cada flujo de calor.....	42
Figura 33: Superposición de la curva McCarthy con la aproximada. ....	49

## 2. Listado de tablas

Tabla 1: Parámetros de diseño propuestos para la válvula .....	11
Tabla 2: Ejemplo de Resultados .....	25
Tabla 3: Resultados de COMSOL para $P=10\text{W}/\text{cm}^2$ .....	29
Tabla 4: Resultados de COMSOL para $P=50\text{W}/\text{cm}^2$ .....	31
Tabla 5: Resultados de COMSOL para $P=80\text{W}/\text{cm}^2$ .....	33
Tabla 6: Resultados de COMSOL para $P=100\text{W}/\text{cm}^2$ .....	35
Tabla 7: Resultados de COMSOL para $P=200\text{W}/\text{cm}^2$ .....	36
Tabla 8: Resultados de COMSOL para $P=300\text{W}/\text{cm}^2$ .....	38
Tabla 9: Tabla resumen de coeficientes de las curvas .....	40
Tabla 10: Coeficientes de la curva $h_b(v_f, q)$ .....	42
Tabla 11: Coeficientes de la curva $h_f(v_f)$ .....	43
Tabla 12: Comparación numérica entre la curva de McCarthy y la aproximada. ....	49

## 3. Introducción

### 3.1 Resumen

Este proyecto estudia la estabilidad de un dispositivo compuesto por una micro celda y una válvula térmica. Un modelo de ecuaciones matemáticas es utilizado para reproducir el comportamiento tanto de la micro celda como de la válvula.

Se han extraído datos de simulaciones del dispositivo bajo diversos escenarios mediante software de elementos finitos. Gracias a los datos extraídos y al modelo de ecuaciones puede solucionarse el sistema y analizar su la estabilidad con el fin de evitar que este actúe en situaciones que presenten inestabilidades y con ellas soluciones descontroladas.

### 3.2 Antecedentes

En este caso se analiza un sistema disipativo y por lo general los sistemas disipativos tienden a ser estables, no obstante “G. Gripenberg en Stability problems in thermostat control” [4], trata con anterioridad un problema similar, el problema del termostato.

Un termostato es un sistema realimentado y por tanto una inestabilidad en la salida afecta directamente a la siguiente entrada lo que puede generar un bucle de inestabilidades, además del problema de retraso entre la señal de salida y la entrada “Dynamic performance of conventional and electrically activated engine thermostats [6]”.

El sistema que se analiza no tiene realimentación pero en su lugar posee una válvula térmica extraída de “Temperature-Regulated Nonlinear Microvalves for Self-Adaptive MEMS Cooling [3]”, dicha válvula actúa como mecanismo de control y puede provocar inestabilidades.

Se realiza un estudio de la estabilidad del sistema de una micro celda térmica propuesta por uno de los modelos del proyecto “STREAMS”[1] para identificar y tipificar en caso de que existan inestabilidades así como definir el rango de parámetros para los que no aparecen.

### 3.3 Descripción del dispositivo

Se dispone de una micro celda Fig.1, acotada en el Plano (14.1).

Dicha micro celda dispone de dos ranuras, la ranura de entrada y la de salida. Estas ranuras están interconectadas por un conducto que atraviesa la celda por su parte interior y posee un conjunto de micro canales Fig.2.

La función de la micro celda es la de refrigerar un flujo de calor que recibe por su parte superior, para ello se hace circular agua a través de ella. El agua entra por la ranura de entrada, recorre el conducto con micro canales y finalmente sale por la ranura de salida.

A su paso, el agua, produce con la micro celda un intercambio de calor por convección. De este modo al abandonar la celda se ocasiona una extracción de calor del dispositivo.

Con el fin de favorecer la velocidad de transferencia de calor y mejorar el rendimiento térmico del dispositivo, los micro canales aumentan la superficie de contacto con el fluido.

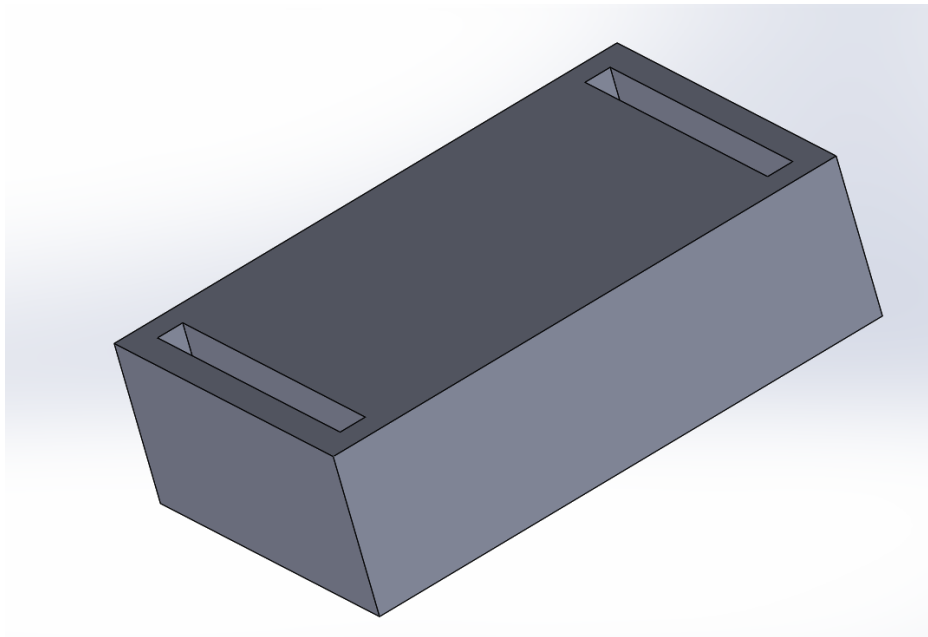


Figura 1: Micro celda utilizada durante el estudio.

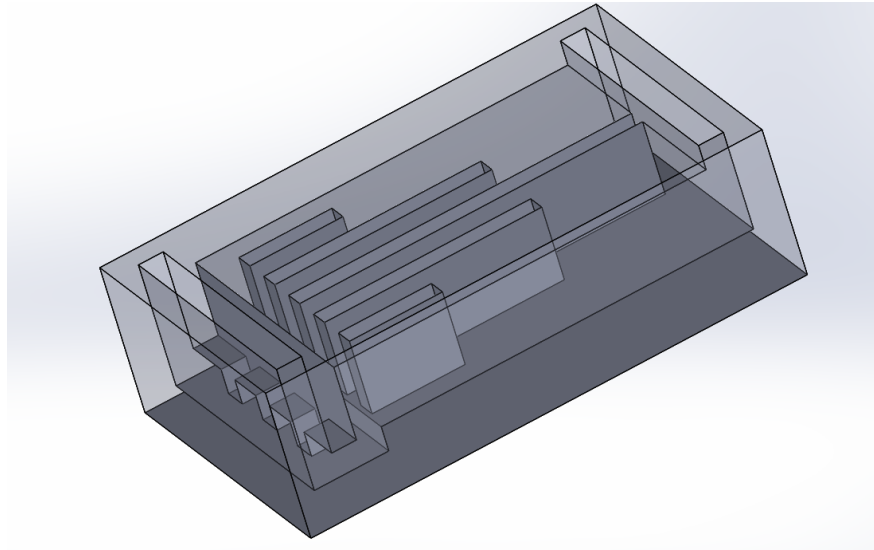


Figura 2: Imagen de la micro celda con transparencias donde se aprecian los micro canales.

Cuanto más elevado ~~sea~~es el caudal, más intercambio de calor se produce entre la celda y el agua, por tanto mayor es la refrigeración obtenida. Para controlar el flujo de agua que circula por su interior y mantener la temperatura deseada, se añade una micro válvula [3], colocada a la salida de la micro celda Fig.4 y sensible a la temperatura. Cuando la temperatura de la micro celda es suficientemente alta, la válvula se dilata Fig.3, permitiendo así el paso del agua. Posibilita un caudal más elevado cuando la temperatura aumenta ya que se produce una mayor dilatación en la válvula.



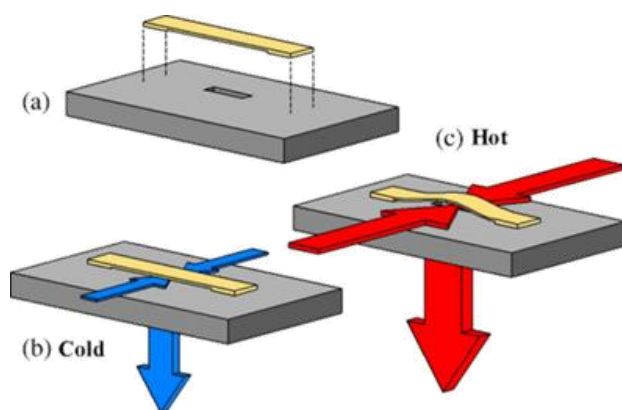


Figura 3: Válvula térmica y posición según temperatura.

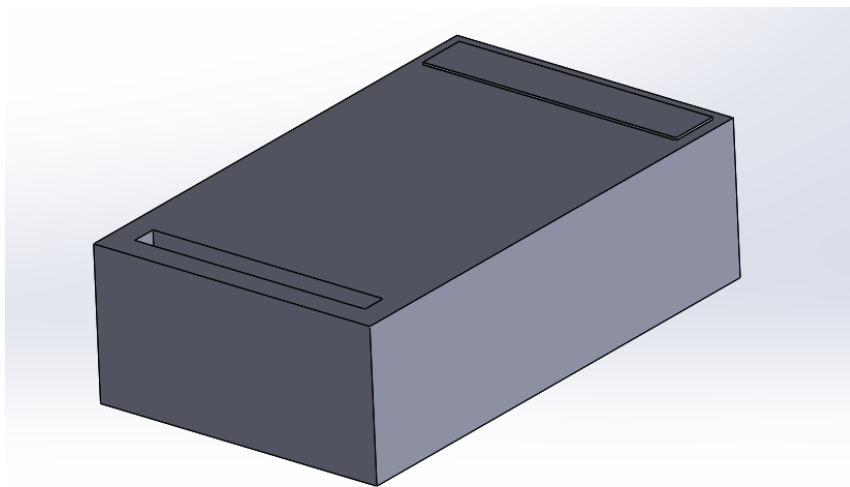


Figura 4: Imagen de la micro celda con la micro válvula montada en la ranura de salida.

## 4. Objetivos

### 4.1 Objetivos generales

En concordancia con los antecedentes se establece un objetivo general para abarcar los requisitos del problema:

Comprobar la estabilidad de la micro celda con el fin de encontrar el rango de parámetros donde se producen inestabilidades y así poder evitarlo.

### 4.2 Objetivos específicos

Además del objetivo general durante la realización del proyecto se pretende alcanzar una serie de objetivos:

Escribir el problema propuesto en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Obtener la solución estacionaria de las ecuaciones del problema junto con la de la válvula, para conocer la temperatura de equilibrio y la velocidad del fluido en el punto estacionario.

Linealizar el modelo alrededor de la solución estacionaria.

Estudiar la estabilidad del modelo lineal.

Obtener los mismos resultados a través de la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias así como con un resolutor de elementos finitos.

## 5. Material y métodos utilizados

Para poder enfrentar el problema ha sido necesario recopilar datos de simulaciones del conjunto en tres dimensiones, modelizarlo en ecuaciones, linealizar el modelo para así estudiar su estabilidad y contrastar los resultados desde dos métodos de resolución diferentes para así asegurar que son correctos.

Durante el transcurso del proyecto se utilizan tres modelos diferenciados que intervendrán en la resolución del problema. En primer lugar el método de ecuaciones diferenciales ordinarias el cuál se ha resuelto gracias al programa Excel (método EDOS). En segundo lugar para poder estudiar la estabilidad de las ecuaciones del modelo de EDOS se ha linealizado el mismo (método EDOS linealizado). Por último se ha utilizado la resolución por ecuaciones con derivadas parciales mediante el programa COMSOL (método EDP).

Se ha utilizado un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias para describir mediante ecuaciones el sistema.

Para resolver el problema se han extraído datos del modelo diseñado en COMSOL, los cuales se especifican en el anejo (A).

Posteriormente mediante el método EDOS se ha encontrado la solución estacionaria del problema utilizando las dos ecuaciones del sistema (1 y 2 ) así como la ecuación a la que responde la válvula (ecuación 4). Alrededor de la solución estacionaria se ha linealizado el modelo para poder estudiar su estabilidad.

Con el fin de poder abarcar un número de puntos suficientemente elevado como para poder prever el comportamiento del sistema, se han realizado múltiples iteraciones al modelo de EDOS (mediante el complemento de Excel Visual Basics) con código descrito en el anejo (B).

Con el software de elementos finitos se ha resuelto de forma dinámica el problema mediante EDP y se ha comprobado la coincidencia del punto estacionario obtenido mediante las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones con derivadas parciales.

Observando la resolución del modelo de EDP mediante software (COMSOL) se ha comparado gráficamente el comportamiento en cuanto a estabilidad previsto mediante la resolución de EDOS linealizado.

## 6. Análisis

### 6.1 Estrategia de resolución

- 1- Se modelizará el sistema con un conjunto de ecuaciones, tanto para la micro celda como para la válvula.
- 2- Se buscará la solución estacionaria del sistema para conocer la temperatura de equilibrio.
- 3- Se linealizará el modelo con el fin de poder estudiar la estabilidad del mismo.
- 4- Se repetirá el proceso para varios puntos modificando los parámetros iniciales.

### 6.2 Modelo teórico empleado

Para la resolución del problema por el método de EDOS se utilizarán ecuaciones desglosadas del modelo de F. Hilmer [2], lo que ayudará a describir matemáticamente el modelo. En este caso se considera oportuno partir del caso de dos nodos y una sección.

Siendo las ecuaciones del sistema:

$$Cb \frac{dT_b}{dt} = q + U_L T_a - T_b + h_b T_f - T_b \quad (1)$$

$$Cf \frac{dT_f}{dt} = -h_f T_f - T_{in} + h_b T_b - T_f \quad (2)$$

$$h_f = \frac{C_f v_f \Gamma}{L} \quad (3)$$

Donde:

-Cb y Cf son respectivamente las capacidades caloríficas del material de la celda y del fluido por unidad de área de apertura  $\frac{J}{m^2 K}$ .

-Tb y Tf son las temperaturas medias de la celda y del fluido (K).

-q es el flujo de calor por unidad de área de superficie  $\frac{W}{m^2}$ .

-U<sub>L</sub> es el coeficiente global de pérdidas de la celda  $\frac{J}{m^2 s K}$ .

- $T_a$  es la temperatura del ambiente (K).

- $h_b$  es el coeficiente de convección del sólido  $\frac{J}{m^2 s K}$ .

- $h_f$ , es el coeficiente de arrastre del fluido  $\frac{J}{m^2 s K}$ .

- $T_{in}$ , es la temperatura de entrada del agua (K).

- $v_f$ , es la velocidad del fluido (m/s).

En la ecuación (3) puede verse como el término  $h_f$  depende fuertemente de la velocidad del fluido, pero en cuanto a los parámetros  $\Gamma$ ,  $L$  no se han definido ya que se ha tratado todo el término  $h_f$  de manera conjunta como puede verse en el Anejo (A).

### 6.3 Descripción de la válvula térmica

Se añade al sistema anterior la ecuación de la válvula con el fin de poder obtener una solución estacionaria. En el anejo (C) se especifica la obtención de dicha ecuación.

La válvula térmica relaciona la temperatura de la celda con la velocidad del fluido, es la encargada de regularla. Cuando la velocidad tiene un valor nulo es porque la válvula se encuentra completamente cerrada, esto sucede cuando la temperatura en la celda no es suficientemente alta como para requerir el paso del flujo de agua.

Para cada temperatura de la celda existe un grado de apertura de la válvula así como una única velocidad de fluido.

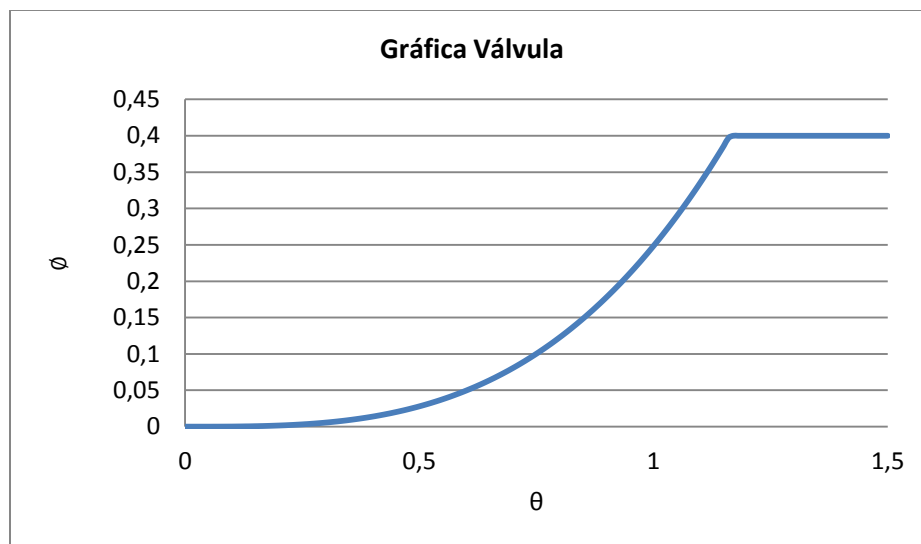


Figura 5: Gráfica de la válvula térmica

Siguiendo la ecuación (4) la Fig.5 debería tener un comportamiento ascendente en todo su recorrido, no obstante se limita el valor de velocidad adimensional a una cierta temperatura adimensional donde se considera que la válvula ya está completamente abierta.

$$\phi = K1 e^{\tau\theta^{ex}} - 1 \quad 4$$

$$v_f = \phi \cdot v_{crit} \quad (5)$$

$$\theta = \frac{T_b - T_{ref}}{T_{crit} - T_{ref}} \quad (6)$$

Dónde:

- $\phi$  es la velocidad adimensional.

- $K1$ ,  $\tau$ ,  $ex$ , son parámetros adimensionales del diseño de la válvula.

- $\theta$ , es la temperatura adimensional.

- $v_c$ , es la velocidad crítica (m/s).

- $T_{ref}$ , es la temperatura de referencia de la válvula (K).

- $T_{crit}$ , es la temperatura crítica de la válvula(K).

K1(s/d)	$\tau$ (s/d)	ex(s/d)
8859,884	2,8057E-05	3,15440544

**Tabla 1: Parámetros de diseño propuestos para la válvula**

## 7. Resolución

### 7.1 Cálculo de la solución estacionaria

En primer lugar se calcula la solución estacionaria que sirve como punto de partida para el cálculo de la estabilidad de la celda, se utilizan las ecuaciones del modelo (1 y 2) así como la ecuación de la válvula (4). Lo que permite encontrar solución al sistema.

$$\frac{dT_b}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dT_f}{dt} = 0 \quad (8)$$

$$T_f = \frac{h_b \cdot h_f \cdot T_{in} + U_L \cdot T_a + q + T_{in} \cdot U_L \cdot h_f}{h_b \cdot (h_f + U_L) + U_L \cdot h_f} \quad (9)$$

$$T_b = \frac{h_b \cdot h_f \cdot T_{in} + U_L \cdot T_a + q + T_a \cdot U_L \cdot h_f + q \cdot h_f}{h_b \cdot (h_f + U_L) + U_L \cdot h_f} \quad (10)$$

En las ecuaciones (9 y 10), los términos “ $h_b$  y  $h_f$ ” dependen a su vez de la velocidad del fluido. La ecuación de la válvula (ecuación 4), relaciona la temperatura media de la celda con la velocidad del fluido por tanto no es sencillo encontrar la solución.

El sistema no es resoluble analíticamente, se utiliza un método iterativo mediante el cual se supone una temperatura de la micro celda, con esta se calcula la velocidad del fluido mediante la ecuación de la válvula y posteriormente se calculan los coeficientes “ $h_b$  y  $h_f$ ” los cuales se utilizan en la resolución de las ecuaciones (9 y 10).

Por último se compara el resultado de la ecuación (10) con la temperatura media de la celda supuesta al inicio y se repite el proceso hasta que el error sea mínimo.

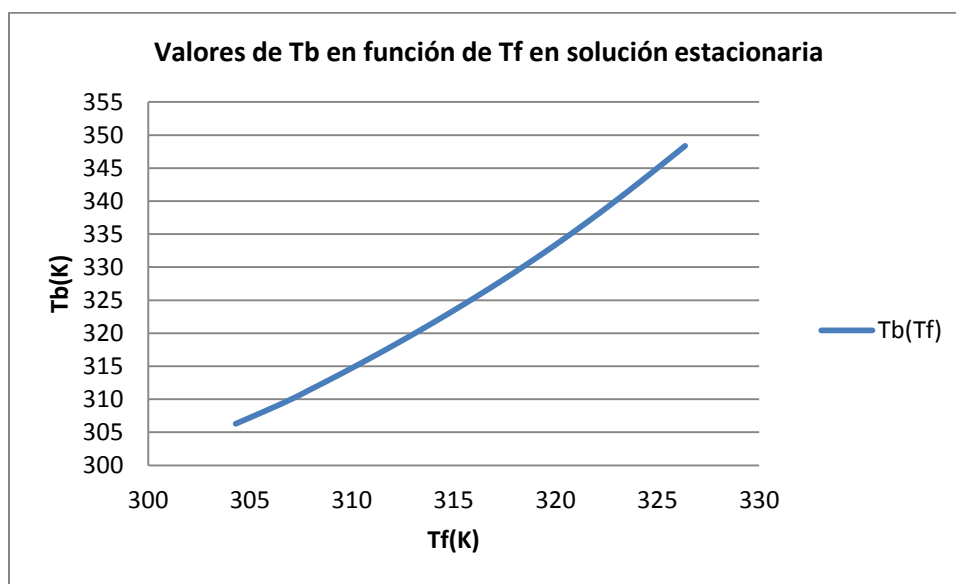


Figura 6: Resultados de temperatura media de la micro celda y del fluido en la solución estacionaria para varios flujos de calor.

Una vez encontrada la solución estacionaria se realiza el mismo proceso para varios flujos de calor en la Fig.6 se aprecia como el valor de temperatura de equilibrio en el punto estacionario aumenta con el flujo de calor disipado por la micro celda.



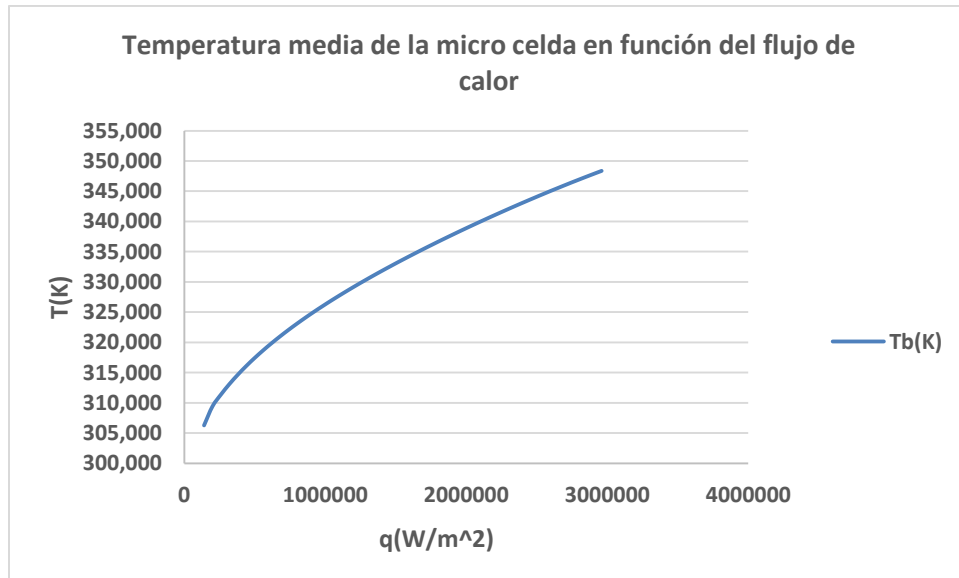


Figura 7: Temperatura media de la celda para la solución estacionaria en función de varios flujos de calor.

Representando el valor de la temperatura media de la micro celda en función del flujo de calor (Fig.7) aparece una curva.

Esta curva denota la acción de la válvula ya que sin ella aparecería una línea recta. La pendiente de esta curva dependerá de la ecuación de la válvula (4), modificando la válvula si se deseara podría obtenerse una curvatura más pronunciada para disminuir la temperatura media de equilibrio.

## 7.2 Análisis de la estabilidad lineal

Para poder realizar el estudio de estabilidad se utiliza el método de EDOS linealizadas por tanto se linealizan las ecuaciones (1 y 2).

Una vez obtenida la solución estacionaria se modifica el sistema y se coloca en forma matricial.

Se añade una pequeña perturbación alrededor de la solución estacionaria, de este modo podrá verse si la solución se alcanza de manera inmediata (en caso de ser estable) o si existe algún tipo de desvío u órbita (punto inestable):

$$hf = hfs + \frac{dhf}{dTb} \cdot \Delta Tf \quad (11)$$

$$hb = hbs + \frac{dhb}{dTb} \cdot \Delta Tb \quad (12)$$

Nota: El sufijo “s” simboliza valor del punto estacionario.

Sustituyendo los coeficientes en las ecuaciones (1,2) se obtiene:

$$\Delta Tb = a1 \cdot \Delta Tb + a2 \cdot \Delta Tf \quad (13)$$

$$\Delta Tf = b1 \cdot \Delta Tb + b2 \cdot \Delta Tf \quad (14)$$

Siendo:

$$a1 = -\frac{1}{Cb} \quad U_L + hb + Tbs - Tfs \cdot hb' \quad (15)$$

$$a2 = \frac{hbf}{Cb} \quad (16)$$

$$b1 = \frac{1}{Cf} \cdot hb - Tfs - Tin \cdot hf' + Tbs - Tfs \cdot hb' \quad (17)$$

$$b2 = -\frac{1}{Cf} \quad hfs + hb \quad (18)$$

Así pues se coloca el sistema de forma matricial.

$$A \begin{pmatrix} \Delta T_b \\ \Delta T_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta T_b \\ \Delta T_f \end{pmatrix} \quad (19)$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Con polinomio característico

$$\lambda^2 - \text{Tr } A \lambda + \text{Det } A = 0 \quad 21$$

Para encontrar los valores propios deberá resolverse la ecuación de segundo grado mediante:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (22)$$

Para simplificar la discusión de puntos inestables se llama discriminante a todo el término que se encuentra dentro de la raíz cuadrada (ecuación 22).

De este modo se tiene determinante, traza y discriminante:

$$\text{Tr } A = a_1 + b_1 \quad 23$$

$$\text{Det } A = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (24)$$

$$\text{disc } A = a_1 - b_2^2 + 4a_2 b_1 \quad (25)$$

Para el estudio de la estabilidad se analiza el cambio de signo en determinante o discriminante. Ya que condicionan a su vez a los valores propios. Cuando el determinante sea cero uno de los valores propios será cero (ecuación 21), a partir de entonces se produce un cambio de signo en el valor propio. Cuando el discriminante sea negativo quedará la raíz cuadrada de un número negativo (ecuación 22) lo que aportará soluciones conjugadas con parte real y parte imaginaria.

### 7.2.1 Análisis de la estabilidad en función del flujo de calor.

Se realiza una representación del determinante y el discriminante en función del flujo de calor en la solución estacionaria. De este modo se podrá ver la tendencia del sistema al modificar el flujo de calor (Fig.8).

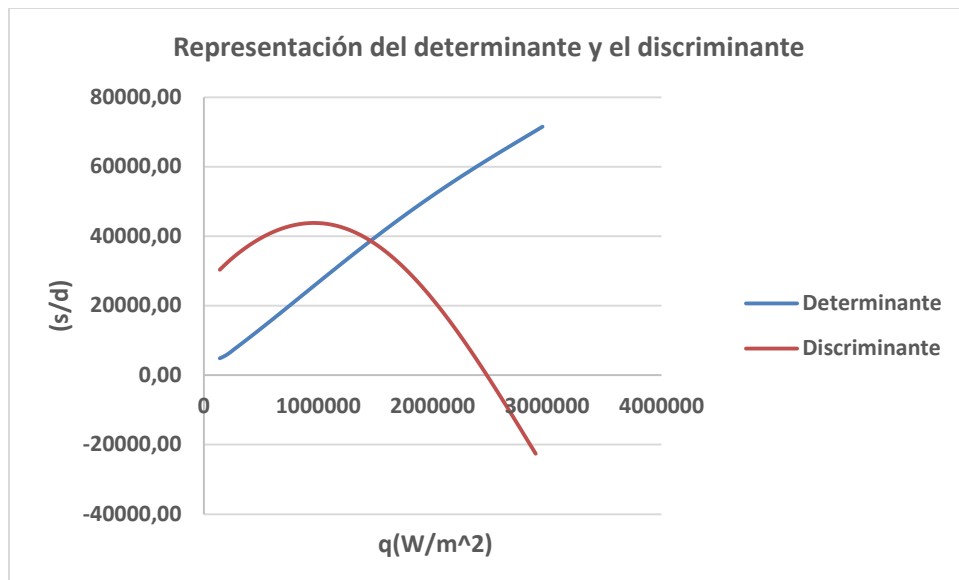


Figura 8: Determinante y discriminante en función del flujo de calor.

Se observa como el determinante es siempre positivo y creciente por tanto en este caso no producirá inestabilidades pero el discriminante sí cambia de signo a partir de un determinado flujo de calor.

Se realiza la representación de los valores propios del sistema para poder entender su naturaleza (Fig.9).

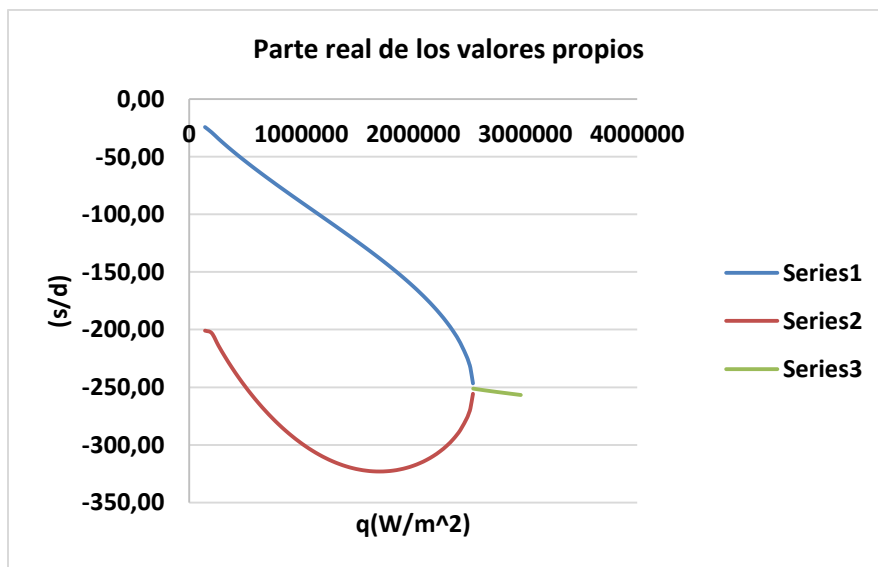


Figura 9: Representación de la parte real de los valores propios del sistema en función del flujo de calor.

En concordancia con la Fig.8, en la Fig.9 los dos valores propios tienen signo negativo por tanto se trata de un conjunto de puntos estables.

No obstante cuando el discriminante Fig.8 cambia de signo, en la Fig.9 se distingue como los valores propios pasan de formar parte de dos curvas distantes a unirse en una sola curva. Esto se debe a que se trata de números complejos y esta curva es su parte real.

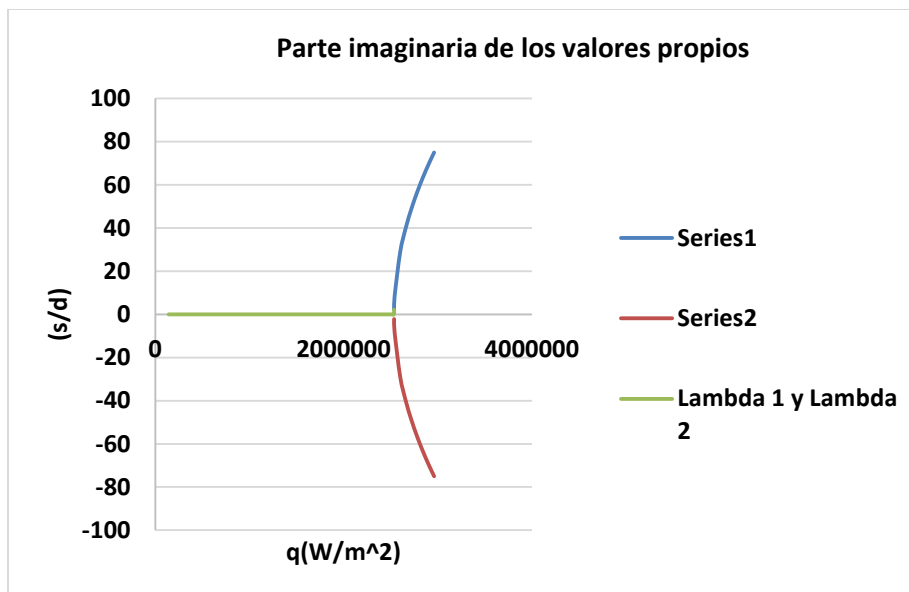


Figura 10: Parte imaginaria de los valores propios en función del flujo de calor.

En la Fig.10 se representa la parte imaginaria en función del flujo de calor, en este caso de forma antagonista a la Fig.9 comienza con una recta que parte del origen y tiene pendiente cero ya que los primeros puntos son reales (por tanto su parte imaginaria es igual a cero).

Pero cuando el discriminante corta con el eje de abscisas, los valores reales desaparecen y se obtienen valores complejos conjugados con parte real negativa y parte imaginaria, al tener parte real no nula se trata de valores propios con órbitas que se alejan o acercan al punto crítico.

El punto crítico es conocido como punto espiral y ya que la parte real es negativa en este caso la órbita converge hacia la solución estacionaria, a este tipo de inestabilidad se le nombrará como inestabilidad de tipo 1.

### 7.2.2 Análisis de la estabilidad en función de la pendiente de la válvula.

Una vez realizado el análisis para diferentes flujos de calor, para comprender que comportamiento puede obtenerse al modificar la válvula. Se realiza el análisis para uno de los puntos estacionarios pero se considera que se tiene un grado de libertad que es modificar la pendiente de la ecuación de la válvula (4), es decir, se realiza un estudio paramétrico modificando en este caso la derivada de la ecuación (4).

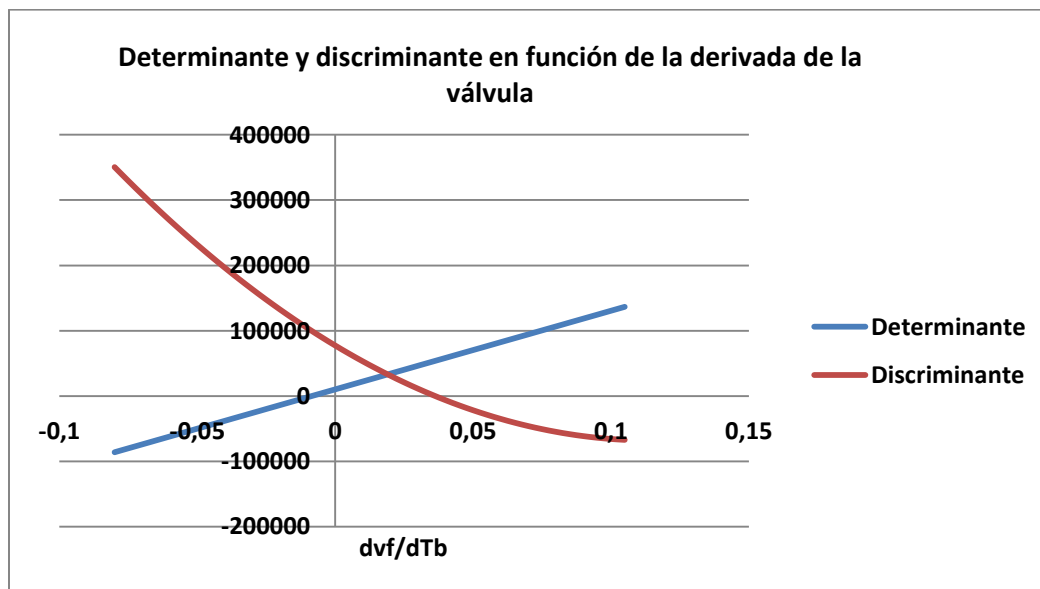


Figura 11: Representación del determinante y el discriminante en función de la derivada de la válvula.

Con esta representación Fig.11 se observa como el determinante sólo cambia de signo para valores de la derivada de la válvula negativos. Por tanto viendo la gráfica de la válvula Fig.5 puede deducirse que utilizando dicha válvula no se producirán cambios de signo en el determinante ya que en ningún punto presenta pendiente negativa.

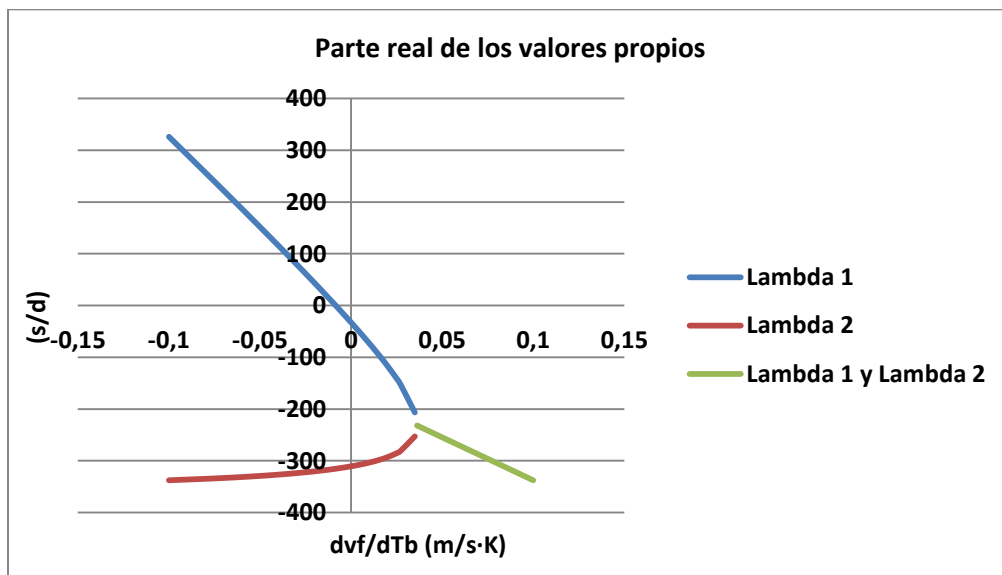


Figura 12: representación de los valores de lambda obtenidos.

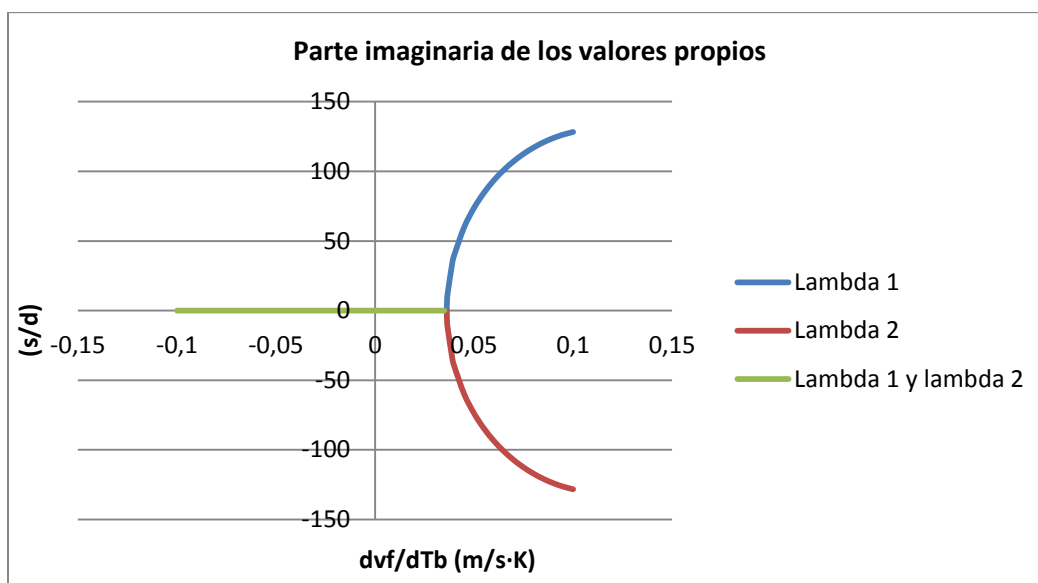


Figura 13: representación de la parte imaginaria.

-En primer lugar, mientras en la Fig.11 el determinante es negativo, existen valores propios reales, distintos y de signo opuesto Fig.12 lo que provoca una inestabilidad del tipo punto de silla, a esta inestabilidad se le nombrará como inestabilidad de tipo 2.

-Posteriormente el determinante vuelve a ser positivo Fig.11 y en consecuencia el valor de  $\lambda_1$  pasa a ser negativo Fig.12, al tener nuevamente los dos valores propios de signo negativo se entra en una zona de nodo estable.

-Por último el discriminante pasa a ser negativo Fig.11 con lo que los valores reales desaparecen y se obtienen valores complejos conjugados con parte real representada en la Fig.12 y parte imaginaria representada en la Fig.13, nuevamente se producen inestabilidades de tipo 1.

### 7.2.3 Análisis de la estabilidad en función de la velocidad crítica, temperatura crítica y flujo de calor

Finalmente para determinar el rango de valores donde el sistema producirá inestabilidades se utiliza nuevamente la ecuación de la válvula (ecuación 4) y se amplía el estudio de inestabilidades modificando los parámetros de diseño temperatura crítica y velocidad crítica, así como el flujo de calor. (Anteriormente se ha utilizado una temperatura crítica de 320K y una velocidad crítica de 1,19 m/s).

Anteriormente se ha observado que para pendientes de válvulas positivas sólo se producen cambios de signo en el discriminante y ya que en este caso la pendiente siempre es positiva, sólo se estudian los cambios de signo en el discriminante.

Por tanto se calcula la solución estacionaria para cada uno de los puntos y se representa el primer valor donde el discriminante corta con el eje de abscisas.



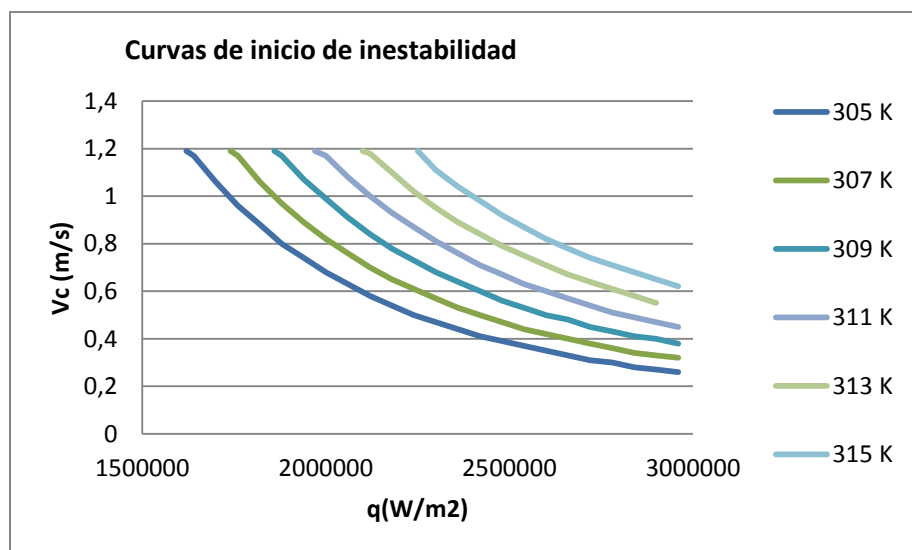
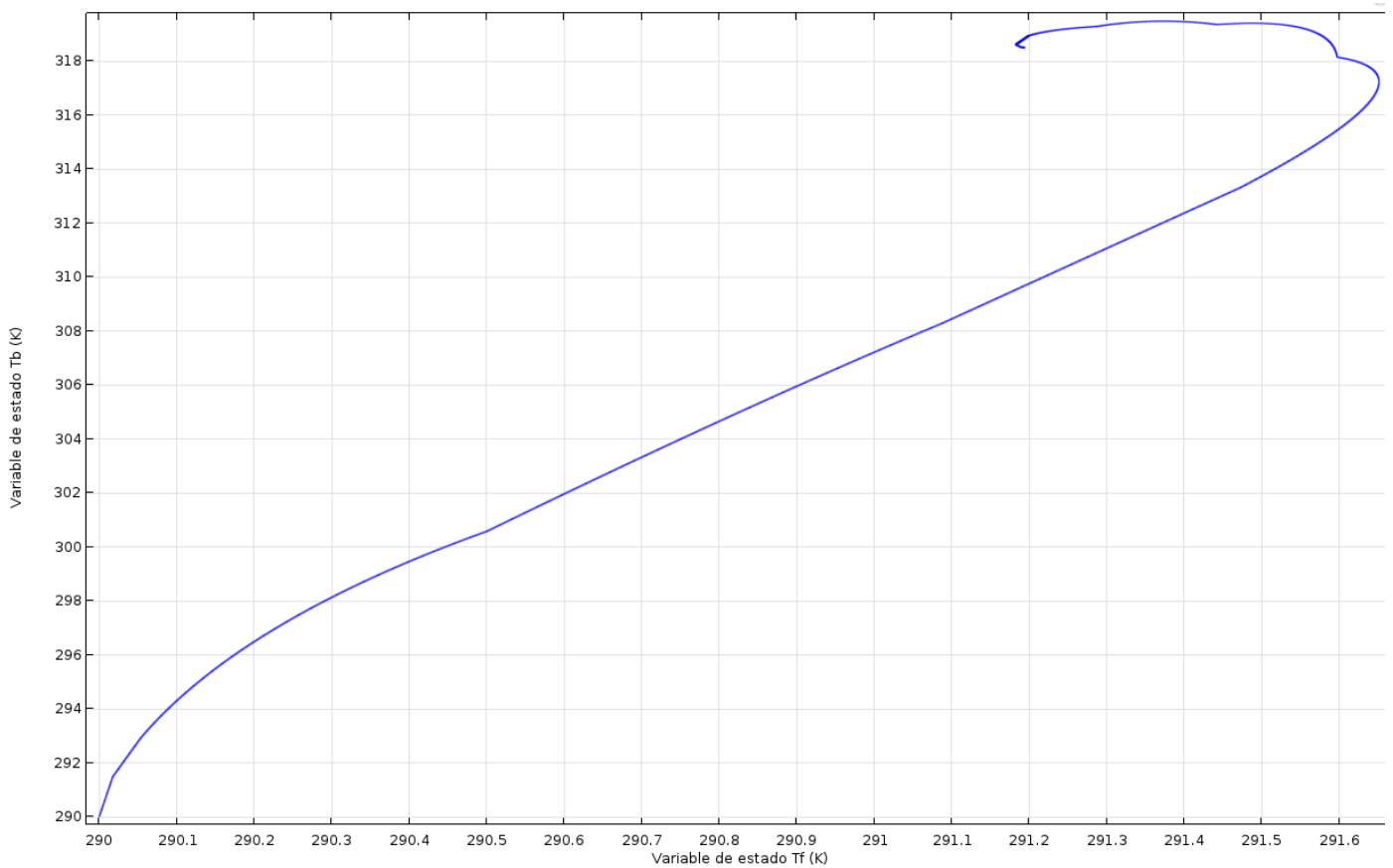


Figura 14: Curvas de inicio de inestabilidades para diversas Temperaturas Críticas, Velocidades críticas y flujos de calor.

En la Fig.14 se representan todos los puntos en los que se inician las inestabilidades, por tanto a partir de dichos puntos en los puntos por encima de las curvas y hacia la derecha pueden producirse inestabilidades de tipo 1.



**Figura 15: Solución estacionaria para uno de los puntos inestables**

Para observar las inestabilidades obtenidas gráficamente se utiliza el software de elementos finitos donde se representa la solución estacionaria calculada cuando se da una pequeña perturbación a los valores de la misma Fig.15, es decir, una vez conocida se recalcula desde un punto próximo para ver si existen las vibraciones esperadas.

Puede verse en uno de los puntos donde el discriminante es negativo como al dar una pequeña perturbación a los valores de la solución estacionaria ( $T_b$  y  $T_f$ ), la solución no se alcanza de forma directa sino que existen oscilaciones de carácter convergente (tipo 1).

### 7.3 Ejemplo de cálculo por EDOS

Para resolver el problema se ha utilizado una hoja de cálculo donde se realiza el problema para varios valores de flujo de calor. Se muestra una de las tablas que se itera para realizar el estudio paramétrico.

Ya que existe simetría dentro de la celda el problema será resuelto para media celda Fig. 16.

Para resolver las ecuaciones se utilizan los siguientes valores:

$$-T_{crit} = 320 \text{ K.}$$

$$-T_{ref} = 273.15 \text{ K.}$$

$$-v_c = 1.19 \frac{m}{s}.$$

$$-S = 5 \cdot 10^{-8} m^2$$

$$-T_a = 298.15 \text{ K.}$$

$$-T_{in} = 298.15 \text{ K.}$$

$$-C_b = 654,17 \frac{J}{m^2 \cdot s}.$$

$$-C_f = 846,13 \frac{J}{m^2 \cdot s}.$$

$$-U_L = 20 \frac{W}{m^2}.$$

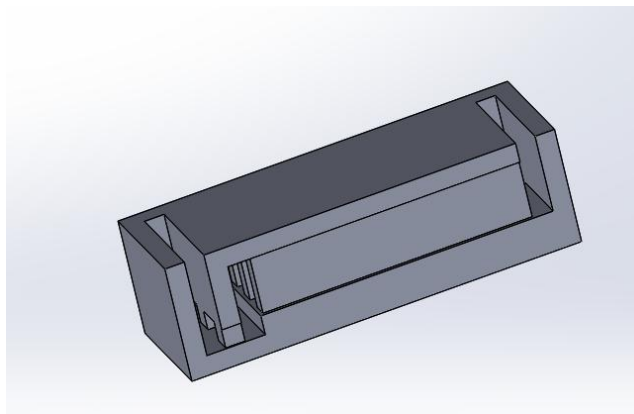


Figura 16: Micro celda seccionada por la mitad.

q(w/m2)	Tb(K), iter	θ	Ø	vf(m/s)	hb(vf,q)	ht(vf,q)	Tf(K),calc	Tb(K), calc	Error Tb	dht/dvf	dhf/dvf	dhf/dtf	hb'	h25	A1	A2	B1	B2	" - Traza	Det	Disc	L1	L2	Re	Im
140000	306.29	0.71	0.08	0.10	70331.61	22759.65	304.29	306.28	3.30E-05	261296.05	238630	0.009	2468.16	12254.06	-115.04	107.51	72.55	-110.02	225.06	4856.81	31227.00	-24.18	-200.89	-112.53	#NUM!
200000	306.64	0.71	0.09	0.10	71302.18	23552.00	306.63	309.43	1.16E-05	260101.86	238630	0.010	2512.74	12305.31	-119.79	109.00	66.48	-112.10	231.89	5855.83	30350.85	-28.84	-203.05	-115.95	#NUM!
260000	307.91	0.74	0.10	0.12	74717.99	26620.16	307.91	311.38	3.86E-05	254272.72	238630	0.010	2662.80	12498.99	-128.40	114.22	70.43	-119.77	248.17	7333.67	32251.28	-34.29	-213.88	-124.08	#NUM!
320000	309.01	0.77	0.11	0.13	77822.32	29459.13	309.00	313.11	8.41E-05	248596.94	238630	0.011	2783.79	12672.18	-136.48	118.96	71.22	-126.79	263.27	8831.63	33982.74	-39.46	-223.81	-131.63	#NUM!
380000	309.98	0.79	0.12	0.14	80683.03	32123.96	309.97	314.67	1.30E-04	243006.77	238630	0.012	2882.04	12830.13	-144.10	123.34	71.85	-133.32	277.42	10349.44	35563.47	-44.42	-233.00	-138.71	#NUM!
440000	310.85	0.80	0.13	0.15	83344.43	34650.65	310.84	316.11	1.66E-04	237462.35	238630	0.012	2967.64	12976.20	-151.32	127.40	72.34	-139.45	290.77	11885.61	37004.55	-49.20	-241.57	-145.38	#NUM!
500000	311.64	0.82	0.13	0.16	85837.44	37064.28	311.63	317.45	1.99E-04	231939.22	238630	0.013	3025.41	1312.69	-158.16	131.22	72.67	-145.25	303.42	13438.18	38308.88	-53.84	-249.57	-151.71	#NUM!
560000	312.37	0.84	0.14	0.17	88184.63	39383.13	312.36	318.70	2.15E-04	226422.24	238630	0.014	3075.43	13241.25	-164.67	134.80	72.86	-150.77	315.43	15004.92	39478.44	-58.37	-257.06	-157.72	#NUM!
620000	313.05	0.85	0.15	0.18	90403.15	41620.97	313.04	319.89	2.36E-04	220902.24	238630	0.014	3113.27	13363.11	-170.84	138.20	72.89	-156.03	326.87	16583.52	40512.90	-62.80	-264.08	-163.44	#NUM!
680000	313.68	0.87	0.16	0.19	92506.40	43788.48	313.67	321.01	2.59E-04	215374.08	238630	0.015	3140.15	13479.22	-182.26	144.41	72.78	-161.08	337.78	18171.64	41410.84	-67.14	-270.64	-168.89	#NUM!
740000	314.28	0.88	0.16	0.20	94505.12	45894.09	314.26	322.09	2.86E-04	20983.94	238630	0.015	3157.09	13590.32	-186.76	144.47	72.51	-165.93	348.19	19766.94	42170.21	-71.42	-276.77	-174.10	#NUM!
800000	314.84	0.89	0.17	0.20	96408.17	47944.62	314.83	323.12	3.18E-04	204285.99	238630	0.015	3164.91	13697.00	-187.53	147.37	72.10	-170.60	358.13	21367.16	42788.70	-75.64	-282.49	-179.07	#NUM!
860000	315.38	0.90	0.18	0.21	98222.97	49945.64	315.36	324.11	3.50E-04	198725.78	238630	0.016	3164.34	13799.74	-192.51	150.15	71.53	-175.11	367.62	22970.07	43263.93	-79.81	-287.81	-183.81	#NUM!
920000	315.89	0.91	0.19	0.22	99955.88	51901.81	315.87	325.06	3.99E-04	193157.86	238630	0.016	3155.98	13898.94	-197.21	152.80	70.81	-179.47	376.68	24573.54	43593.62	-83.94	-292.74	-188.34	#NUM!
980000	316.37	0.92	0.19	0.23	101612.44	53817.04	316.35	325.99	4.47E-04	187384.92	238630	0.017	3140.39	13994.95	-201.63	155.33	69.94	-183.69	385.33	26175.53	43775.11	-88.05	-297.28	-192.66	#NUM!
1040000	316.84	0.93	0.20	0.24	103197.56	55694.67	316.81	326.89	4.98E-04	182009.04	238630	0.017	3118.06	14088.05	-205.79	157.75	68.91	-187.79	393.58	27774.08	43808.44	-92.14	-301.44	-196.79	#NUM!
1100000	317.28	0.94	0.21	0.24	104715.64	57537.61	317.26	327.76	5.52E-04	176343.99	238630	0.018	3089.42	14178.48	-209.69	160.07	67.73	-191.76	401.45	29367.33	43690.41	-96.21	-305.23	-200.72	#NUM!
1160000	317.71	0.95	0.21	0.25	106170.72	59348.36	317.69	328.61	6.07E-04	170866.29	238630	0.018	3054.91	14266.45	-213.32	162.30	66.40	-195.62	408.94	30953.53	43420.62	-100.28	-308.66	-204.47	#NUM!
1220000	318.12	0.96	0.22	0.26	107566.49	61129.14	318.10	329.43	6.61E-04	165307.07	238630	0.018	3040.88	14352.15	-216.71	164.43	64.92	-199.37	416.08	32531.05	42998.50	-104.36	-311.72	-208.04	#NUM!
1280000	318.52	0.97	0.22	0.27	108906.39	62881.92	318.50	330.24	7.15E-04	159761.56	238630	0.019	2969.71	14435.75	-219.84	166.48	63.28	-203.03	422.87	34098.34	42423.94	-108.45	-314.42	-211.43	#NUM!
1340000	318.91	0.98	0.23	0.27	110193.66	64608.45	318.88	331.03	7.67E-04	154234.12	238630	0.019	2919.73	14517.38	-222.73	168.45	61.50	-206.59	429.32	35653.99	41697.27	-112.56	-316.76	-214.63	#NUM!
1400000	319.28	0.98	0.24	0.28	111431.37	66310.30	319.25	331.81	8.16E-04	148729.17	238630	0.019	2865.26	14597.19	-225.37	170.34	59.56	-210.06	435.44	37196.66	40819.33	-116.70	-318.74	-217.72	#NUM!
1460000	319.64	0.99	0.24	0.29	112622.45	67988.91	319.61	332.57	8.63E-04	143251.16	238630	0.020	2806.60	14675.28	-227.78	172.16	57.48	-213.46	441.24	38725.18	39791.39	-120.88	-320.36	-220.62	#NUM!
1520000	319.99	1.00	0.25	0.30	113769.68	69645.56	319.96	333.32	9.07E-04	137801.91	238630	0.020	2744.06	14751.76	-229.96	173.91	55.26	-216.77	446.73	40238.46	38615.20	-125.11	-322.62	-223.37	#NUM!
1580000	320.34	1.01	0.25	0.30	114875.79	71281.44	320.31	334.05	9.49E-04	132393.91	238630	0.020	2677.91	14826.72	-231.91	175.61	53.89	-220.10	451.92	41735.54	37292.98	-129.40	-322.52	-225.96	#NUM!
1640000	320.67	1.01	0.26	0.31	115943.93	72897.62	320.64	334.78	9.89E-04	127023.63	238630	0.021	2608.43	14900.26	-233.64	177.24	50.17	-223.61	456.83	43215.57	35827.40	-133.77	-323.05	-228.41	#NUM!
1700000	320.99	1.02	0.27	0.32	116975.03	74495.11	320.96	335.49	1.03E-03	121698.25	238630	0.021	2535.88	14972.44	-235.16	178.81	47.74	-226.29	461.45	44677.84	34221.57	-138.23	-323.32	-230.72	#NUM!
1760000	321.31	1.03	0.27	0.32	117973.21	76074.81	321.28	336.19	1.07E-03	116422.21	238630	0.021	2460.54	15043.35	-236.46	180.34	44.95	-229.34	465.80	46121.76	32479.05	-142.79	-323.01	-232.90	#NUM!
1820000	321.62	1.03	0.28	0.33	118940.36	77637.57	321.58	336.88	1.10E-03	111199.99	238630	0.021	2382.64	15113.04	-237.56	181.82	42.04	-232.33	469.88	47546.86	30603.78	-147.47	-322.41	-232.94	#NUM!
1880000	321.92	1.04	0.28	0.34	119878.90	79184.17	321.88	337.56	1.14E-03	106036.03	238630	0.022	2302.45	15181.58	-238.46	183.25	39.00	-235.26	473.72	48952.81	28600.15	-152.30	-321.42	-236.86	#NUM!
1940000	322.21	1.05	0.29	0.34	120791.17	80715.33	322.18	338.23	1.18E-03	100934.76	238630	0.022	2220.21	15249.02	-239.17	184.65	35.84	-238.15	477.32	50339.43	26472.90	-157.31	-320.01	-238.66	#NUM!
2000000	322.50	1.05	0.29	0.35	121679.53	82231.72	322.46	338.89	1.23E-03	95900.60	238630	0.022	2136.16	15315.42	-239.69	186.01	32.56	-240.99	480.68	51706.65	24227.15	-162.51	-318.17	-240.34	#NUM!
2060000	322.78	1.06	0.30	0.35	122546.28	83733.95	322.74	339.55	1.27E-03	90937.96	238630	0.023	2050.54	15380.83	-240.03	187.33	29.17	-243.79	483.83	53054.57	21868.37	-167.97	-315.85	-241.91	#NUM!
2120000	323.05	1.07	0.30	0.36	123393.72	85272.60	323.02	340.19	1.32E-03	86051.24	238630	0.023	1963.59	15445.27	-240.21	188.63	25.66	-246.55	486.76	54383.44	19402.55	-173.73	-313.03	-243.38	#NUM!
2180000	323.32	1.07	0.31	0.37	124224.13	86698.20	323.28	340.83	1.38E-03	81244.84	238630	0.023	1875.55	15508.81	-240.22	189.90	22.06	-249.28	489.50	55693.64	16835.19	-179.87	-309.62	-244.75	#NUM!
2240000	323.59	1.08	0.31	0.37	125039.78	88161.24	323.55	341.46	1.44E-03	76523.13	238630	0.023	1786.64	15571.47	-240.08	191.14	18.35	-251.97	492.05	56985.74	14173.23	-186.50	-305.55	-246.03	#NUM!
2300000	323.85	1.08	0.32	0.38	125842.93	89612.16	323.81	342.08	1.50E-03	71890.51	238630	0.024	1697.11	15633.29	-239.80	192.37	14.56	-254.64	494.43	58260.45	11423.11	-193.78	-300.66	-247.22	#NUM!
2360000	324.10	1.09	0.32	0.39	126653.84	91051.39	324.06	342.69	1.56E-03	67351.39	238630	0.024	1607.17	15694.31	-239.38	193.58	10.68	-257.27	496.66	59518.66	8591.65	-201.38	-294.67	-248.33	#NUM!
2420000	324.35	1.09	0.33	0.39	127420.77	92479.30	324.31	343.29	1.63E-03	62310.06	238630	0.024	1517.07	15754.54	-238.84	194.78	6.73	-259.89	498.73	60761.45	5685.95	-211.66	-287.07	-249.37	#NUM!
2480000	324.59	1.10	0.33	0.40	128199.96	93886.25	324.55	343.89	1.69E-03	58571.01	238630	0.024	1427.04	15814.03	-238.19	195.97	2.71	-262.48	500.67	61990.05	2713.04	-224.29	-276.38	-250.34	#NUM!
2540000	324.83	1.10	0.34	0.40	128975.70	95302.54	324.79	344.48	1.76E-03	54338.59	238630	0.025	1337.30	15872.79	-237.43	197.16	1.37	-265.06	502.50	63205.89	-319.59	#NUM!	#NUM!	253.25	8.94
2600000	325.07	1.11	0.34	0.41	129750.24	96688.48	325.03	345.06	1.83E-03</																

## 8. Discusión

Mediante el método de EDOS se ha encontrado tanto la solución estacionaria con las ecuaciones (1,2 y 4) como tras linealizarlo, los cambios de signo en determinante, discriminante y traza los cuales dan información sobre la estabilidad del sistema.

Por el otro lado se ha utilizado el método de EDP para resolver el problema y verificar los resultados.

El punto estacionario coincide cuando se resuelve el problema desde los dos métodos de resolución.

En cuanto a las inestabilidades, todos aquellos puntos que con el método de EDP linealizado tienen un discriminante negativo (Tabla 2), presentan como es de esperar un comportamiento inestable convergente en la resolución mediante software con elementos finitos Fig.15.

Tras estudiar la estabilidad se ha representado en la Fig.14 las curvas donde se inician las inestabilidades.

## 9. Conclusiones

Mediante el estudio realizado queda definido el rango de parámetros para los que la micro celda no presentará ningún tipo de inestabilidad. De este modo podrá diseñarse el sistema para evitar en sus puntos de funcionamiento las soluciones inestables.

No obstante si se utiliza una válvula que responde a la ecuación de diseño (4) aun trabajando fuera del rango, las inestabilidades que se obtienen son de carácter convergente, jamás producirá inestabilidades de tipo 2.

Modificando los valores de diseño de la válvula, sí se alcanzan dichas inestabilidades y en caso de utilizar otra válvula deberá verificarse que la derivada de la curva que la describe sea positiva para evitar inestabilidades de tipo 2.

El problema se ha resuelto para varios flujos de calor, velocidades del fluido y temperaturas críticas, aun así se han fijado los parámetros de diseño que físicamente no podían ser modificados.

## 10. Bibliografía

- [1]-Gerard Laguna, Jérôme Barrau, Luc Fréchette, Joan Rosell, Manel Ibañez, Montse Vilarrubí, Yina Betancourt, Hassan Azarkish, Louis-Michel Collin, Alvaro Fernandez, Gonzalo Sisó (2017), Distributed and Self-Adaptive Microfluidic Cell Cooling for CPV Dense Array Receivers.
- [2]-F. Hilmer, K. Vajen, A. Ratka, H. Ackermann, W. Fuhs, O. Melsheimer (1998), Numerical solution and validation of a dynamic model of solar collectors working with varying fluid flow rate.
- [3]- Matthew McCarthy (2008), Temperature-Regulated Nonlinear Microvalves for Self-Adaptive MEMS Cooling.
- [4]-G. Gripenberg, Stability problems in thermostat control.
- [5]- Ji-Xiang Wang , Yun-Ze Li , Hong-Sheng Zhang, Sheng-Nan Wang , Yi-Hao Liang, Wei Guo , Yang Liu, Shao-Ping Tian (2015), A highly self-adaptive cold plate for the single-phase mechanically pumped fluid loop for spacecraft thermal management.
- [6]-Alan Gunter, L., Razi Nalim (2001), Dynamic performance of conventional and electrically activated engine thermostats.
- [7]- Wang J, Li, Ning (2013), Influences of thermostatic valve with sensitive wax on dynamic performance of spacecraft thermal control system.
- [8]-Augusto Visintin, Models of Hysteresis .
- [9]-David Hill, Peter Moylan (1976), The Stability of Nonlinear Dissipative Systems.

## 11. Anejo A

### 11.1 Cálculo del coeficientes de convección de la micro celda y el coeficiente de arrastre con los datos obtenidos de simulaciones mediante software de elementos finitos.

Se realiza mediante el programa de elementos finitos la simulación de diversos escenarios en este caso para las potencias de 10, 50, 80, 100, 200 y 300 W/cm<sup>2</sup>, se pretende obtener los coeficientes de convección de la micro celda así como el coeficiente de arrastre en función de la velocidad del fluido y del flujo de calor.

$$-P=10W/cm^2$$

Qref(m <sup>3</sup> /s)	Tbase(K)	Tempfluido(K)	Tempsolido(K)	Hb(J/(m <sup>2</sup> ·s·K))	q(W/m <sup>2</sup> )	Ø(m <sup>2</sup> )	Vf(m/s)	Tin(K)	Cf·Γ/L(J/m <sup>3</sup> ·K)	hf(J/m <sup>2</sup> ·s·K)
1,50E-08	325,75	324,59	325,49	110408,02	100000	5E-08	3,00E-01	323,15	231689,00	6,95E+04
1,42E-08	325,84	324,66	325,59	107802,59	100000	5E-08	2,85E-01	323,15	232143,00	6,62E+04
1,35E-08	325,95	324,74	325,69	105130,41	100000	5E-08	2,70E-01	323,15	232581,91	6,28E+04
1,27E-08	326,07	324,83	325,81	102385,49	100000	5E-08	2,55E-01	323,15	232999,49	5,94E+04
1,20E-08	326,20	324,94	325,94	99561,72	100000	5E-08	2,40E-01	323,15	233386,32	5,60E+04
1,12E-08	326,35	325,05	326,09	96655,18	100000	5E-08	2,25E-01	323,15	233729,18	5,26E+04
1,05E-08	326,52	325,18	326,25	93657,61	100000	5E-08	2,10E-01	323,15	234014,08	4,91E+04
9,75E-09	326,71	325,34	326,44	90560,85	100000	5E-08	1,95E-01	323,15	234220,02	4,57E+04
9,00E-09	326,93	325,52	326,67	87352,06	100000	5E-08	1,80E-01	323,15	234321,81	4,22E+04
8,25E-09	327,20	325,74	326,93	84021,69	100000	5E-08	1,65E-01	323,15	234284,77	3,87E+04
7,50E-09	327,51	326,00	327,24	80556,79	100000	5E-08	1,50E-01	323,15	234062,37	3,51E+04
6,75E-09	327,90	326,32	327,62	76949,37	100000	5E-08	1,35E-01	323,15	233591,43	3,15E+04
6,00E-09	328,38	326,73	328,10	73192,20	100000	5E-08	1,20E-01	323,15	232771,41	2,79E+04
5,25E-09	328,99	327,26	328,71	69282,66	100000	5E-08	1,05E-01	323,15	231443,93	2,43E+04
4,50E-09	329,82	327,99	329,53	65229,84	100000	5E-08	9,00E-02	323,15	229356,26	2,06E+04
3,75E-09	330,98	329,05	330,68	61056,65	100000	5E-08	7,50E-02	323,15	226099,11	1,70E+04
3,00E-09	332,75	330,69	332,45	56809,94	100000	5E-08	6,00E-02	323,15	221029,14	1,33E+04
2,25E-09	335,79	333,57	335,47	52651,35	100000	5E-08	4,50E-02	323,15	213214,45	9,59E+03
1,50E-09	342,05	339,69	341,71	49295,61	100000	5E-08	3,00E-02	323,15	201582,26	6,05E+03

Tabla 3: Resultados de COMSOL para P=10W/cm<sup>2</sup>



Mediante las ecuaciones (1), (2), con valores de  $U_L=20$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) y  $T_a=298,15\text{K}$  se obtienen las siguientes gráficas para  $h_b$  y  $h_f$ .

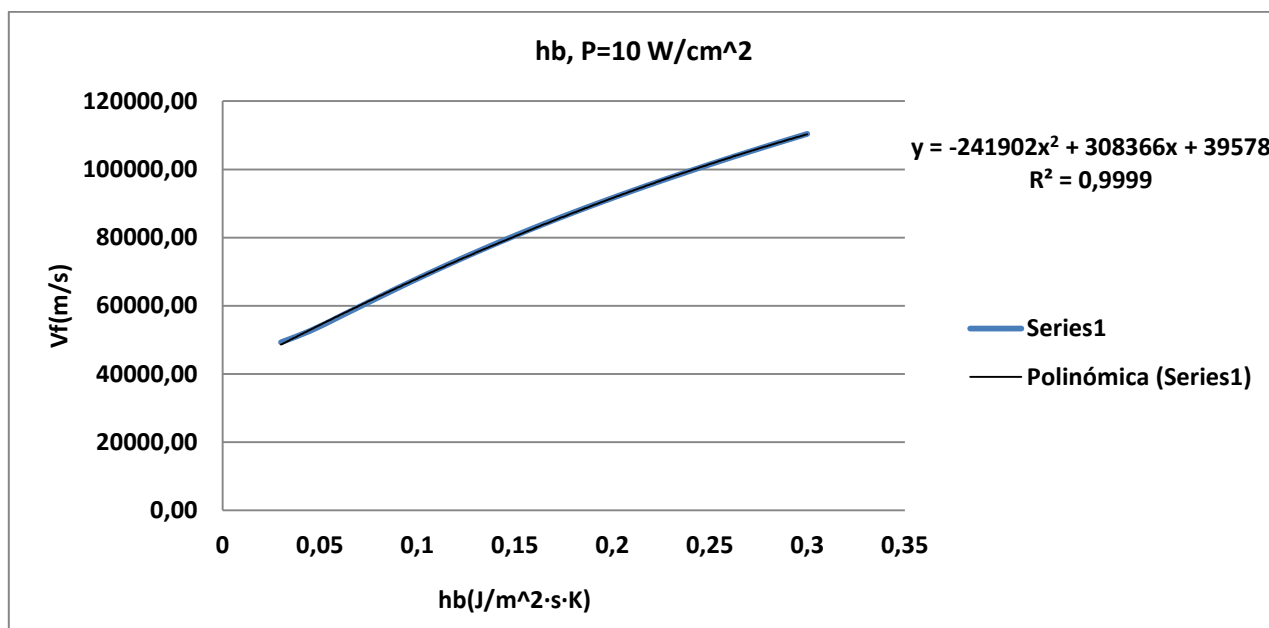


Figura 17: Curva  $h_b(v_f)$  para  $P=10 \text{ W}/\text{cm}^2$ .

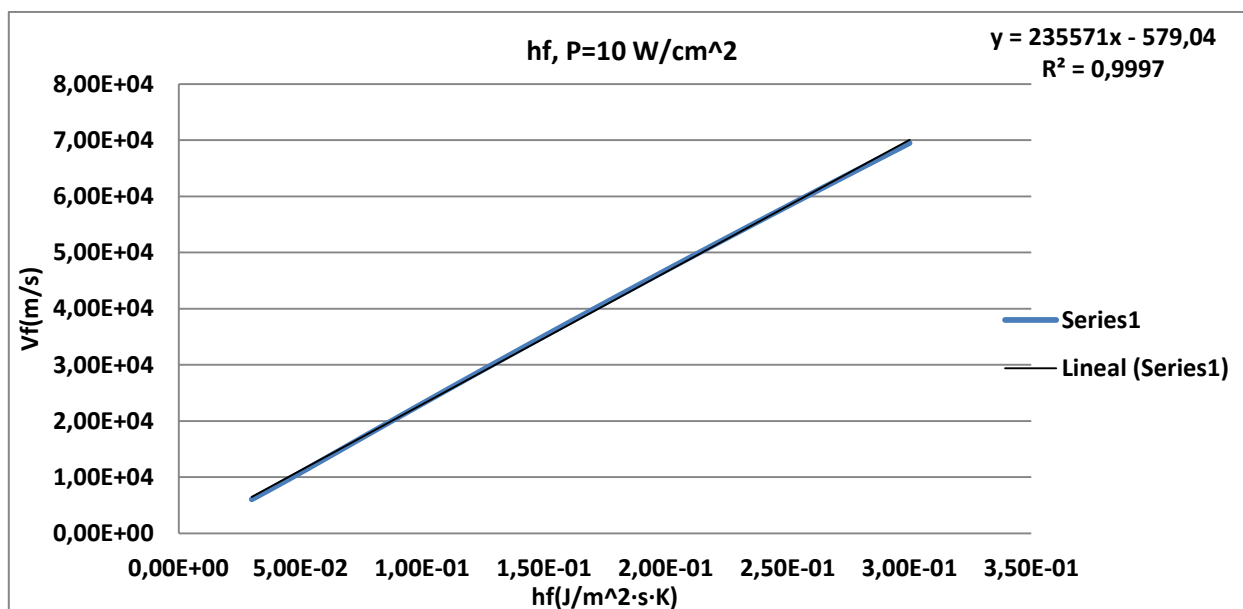


Figura 18: Curva hf(vf) para P=10 W/cm<sup>2</sup>.

-P=50W/cm<sup>2</sup>

Qref(m <sup>3</sup> /s)	Tbase(K)	Tempfluido(K)	Tempsolido(K)	Hb(J/(m <sup>2</sup> ·s)	q(W/m <sup>2</sup> )	Ø(m <sup>2</sup> )	Vf(m/s)	Tin(K)	Cf·Γ/L(J/m <sup>3</sup> ·K)	hf(J/m <sup>2</sup> ·s·K)
1,50E-08	336,01	330,31	334,75	112574,80	500000	5E-08	0,3	323,15	232770,45	69831,14
1,42E-08	336,48	330,67	335,22	109996,39	500000	5E-08	0,285	323,15	233223,99	66468,84
1,35E-08	337,00	331,08	335,73	107353,14	500000	5E-08	0,27	323,15	233658,05	63087,67
1,27E-08	337,59	331,53	336,31	104638,19	500000	5E-08	0,255	323,15	234065,64	59686,74
1,20E-08	338,23	332,04	336,95	101843,72	500000	5E-08	0,24	323,15	234439,96	56265,59
1,12E-08	338,96	332,62	337,67	98964,08	500000	5E-08	0,225	323,15	234765,47	52822,23
1,05E-08	339,80	333,28	338,49	95992,26	500000	5E-08	0,21	323,15	235025,65	49355,39
9,75E-09	340,75	334,05	339,43	92922,27	500000	5E-08	0,195	323,15	235195,24	45863,07
9,00E-09	341,86	334,96	340,53	89742,34	500000	5E-08	0,18	323,15	235241,91	42343,54
8,25E-09	343,16	336,04	341,82	86438,82	500000	5E-08	0,165	323,15	235129,29	38796,33
7,50E-09	344,72	337,35	343,37	83003,49	500000	5E-08	0,15	323,15	234799,32	35219,90
6,75E-09	346,63	338,97	345,26	79418,53	500000	5E-08	0,135	323,15	234170,67	31613,04
6,00E-09	349,01	341,02	347,63	75676,81	500000	5E-08	0,12	323,15	233124,40	27974,93
5,25E-09	352,09	343,72	350,69	71764,63	500000	5E-08	0,105	323,15	231474,87	24304,86
4,50E-09	356,23	347,42	354,80	67687,42	500000	5E-08	0,09	323,15	228931,92	20603,87
3,75E-09	362,11	352,77	360,65	63474,91	500000	5E-08	0,075	323,15	225047,03	16878,53
3,00E-09	371,12	361,18	369,62	59211,89	500000	5E-08	0,06	323,15	219137,57	13148,25
2,25E-09	386,62	376,00	385,06	55149,78	500000	5E-08	0,045	323,15	210251,54	9461,32
1,50E-09	418,87	407,61	417,23	52007,71	500000	5E-08	0,03	323,15	197326,29	5919,79

Tabla 4: Resultados de COMSOL para P=50W/cm<sup>2</sup>

Mediante las ecuaciones (1), (2), con valores de  $U_L=20$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) y  $T_a=298,15\text{K}$  se obtienen las siguientes gráficas para  $h_b$  y  $h_f$ .

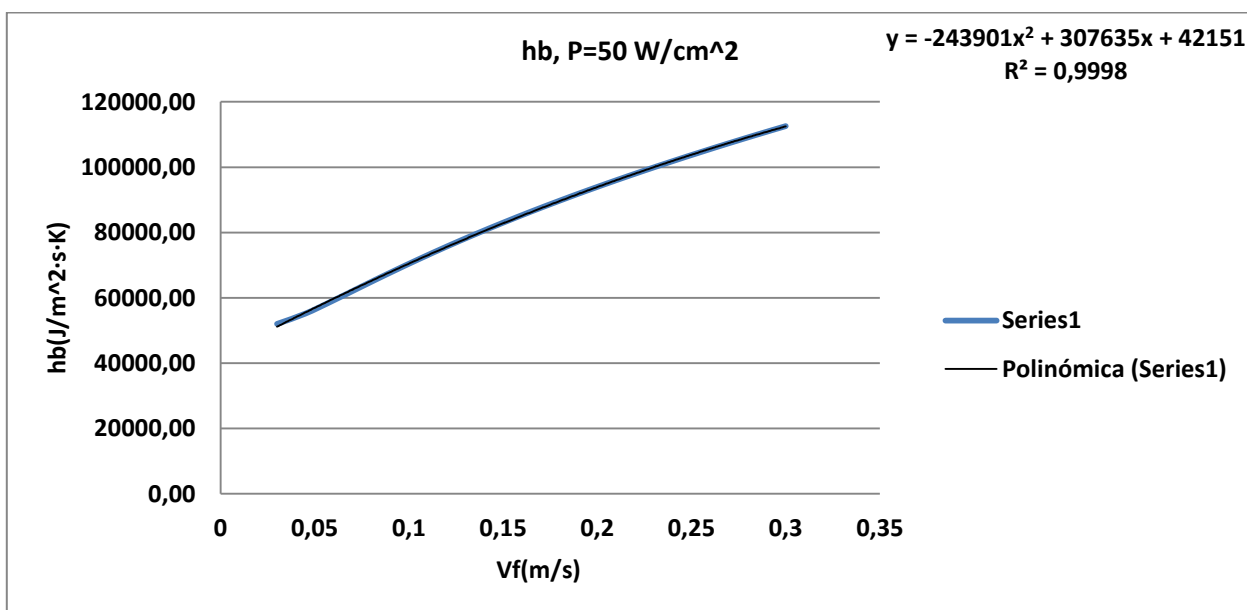


Figura 19: Curva  $h_b(v_f)$  para  $P=50 \text{ W}/\text{cm}^2$ .

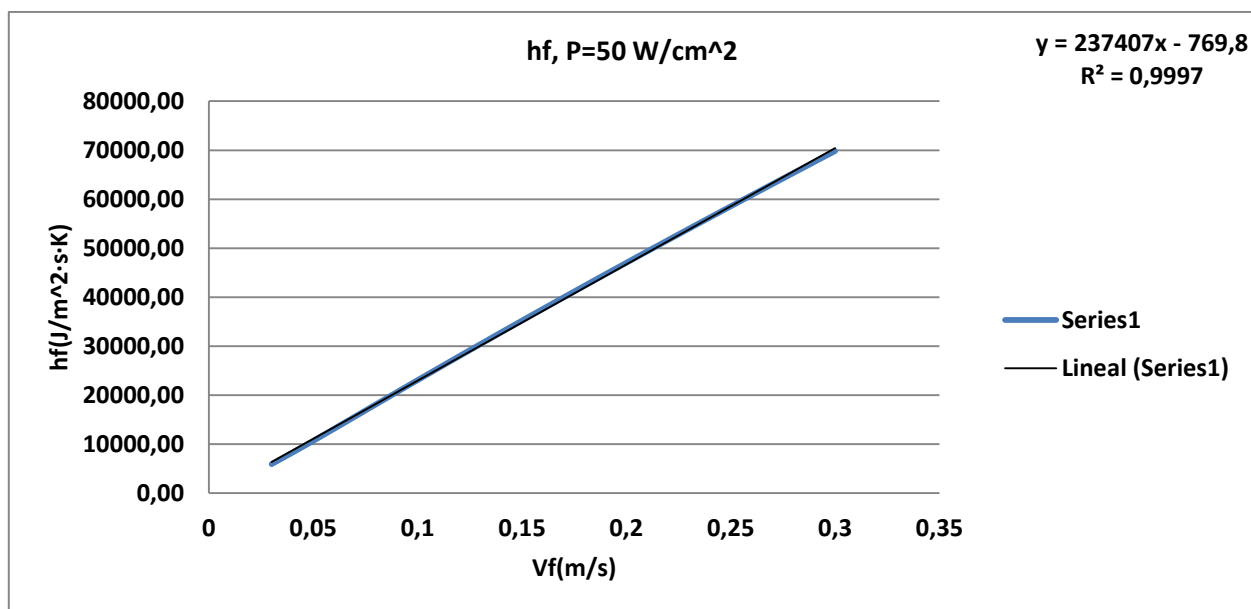


Figura 20: Curva hf(vf) para P=50 W/cm<sup>2</sup>.

-P=80 W/cm<sup>2</sup>

Qref(m <sup>3</sup> /s)	Tbase(K)	Tempfluido(K)	Tempsolido(K)	Hb(J/(m <sup>2</sup> .s.K))	q(W/m <sup>2</sup> )	Ø(m <sup>2</sup> )	Vf(m/s)	Tin(K)	Cf·Γ/L(J/m <sup>3</sup> )	hf(J/m <sup>2</sup> .s.K)
1,50E-08	343,59	334,57	341,59	114064,53	800000	5E-08	0,3	323,15	233444,93	70033,48
1,42E-08	344,34	335,15	342,33	111499,16	800000	5E-08	0,285	323,15	233889,19	66658,42
1,35E-08	345,17	335,80	343,14	108868,87	800000	5E-08	0,27	323,15	234311,79	63264,18
1,27E-08	346,09	336,52	344,05	106169,86	800000	5E-08	0,255	323,15	234703,26	59849,33
1,20E-08	347,12	337,33	345,07	103392,88	800000	5E-08	0,24	323,15	235053,59	56412,86
1,12E-08	348,28	338,26	346,22	100530,95	800000	5E-08	0,225	323,15	235351,52	52954,09
1,05E-08	349,60	339,32	347,52	97578,18	800000	5E-08	0,21	323,15	235575,98	49470,96
9,75E-09	351,12	340,56	349,02	94526,19	800000	5E-08	0,195	323,15	235701,20	45961,73
9,00E-09	352,88	342,01	350,76	91363,57	800000	5E-08	0,18	323,15	235691,63	42424,49
8,25E-09	354,95	343,74	352,82	88079,58	800000	5E-08	0,165	323,15	235502,23	38857,87
7,50E-09	357,44	345,84	355,29	84658,22	800000	5E-08	0,15	323,15	235073,42	35261,01
6,75E-09	360,48	348,44	358,31	81087,66	800000	5E-08	0,135	323,15	234315,70	31632,62
6,00E-09	364,30	351,75	362,09	77352,53	800000	5E-08	0,12	323,15	233091,24	27970,95
5,25E-09	369,23	356,10	367,00	73436,85	800000	5E-08	0,105	323,15	231196,59	24275,64
4,50E-09	375,89	362,08	373,62	69333,71	800000	5E-08	0,09	323,15	228318,23	20548,64
3,75E-09	385,39	370,77	383,07	65062,82	800000	5E-08	0,075	323,15	223982,33	16798,68
3,00E-09	400,02	384,45	397,64	60681,33	800000	5E-08	0,06	323,15	217497,46	13049,85
2,25E-09	425,29	408,61	422,82	56317,50	800000	5E-08	0,045	323,15	208014,16	9360,64
1,50E-09	478,08	460,13	475,47	52173,37	800000	5E-08	0,03	323,15	194669,24	5840,08

Tabla 5: Resultados de COMSOL para P=80W/cm<sup>2</sup>

Mediante las ecuaciones (1), (2), con valores de  $U_L=20$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) y  $T_a=298,15\text{K}$  se obtienen las siguientes gráficas para  $h_b$  y  $h_f$ .

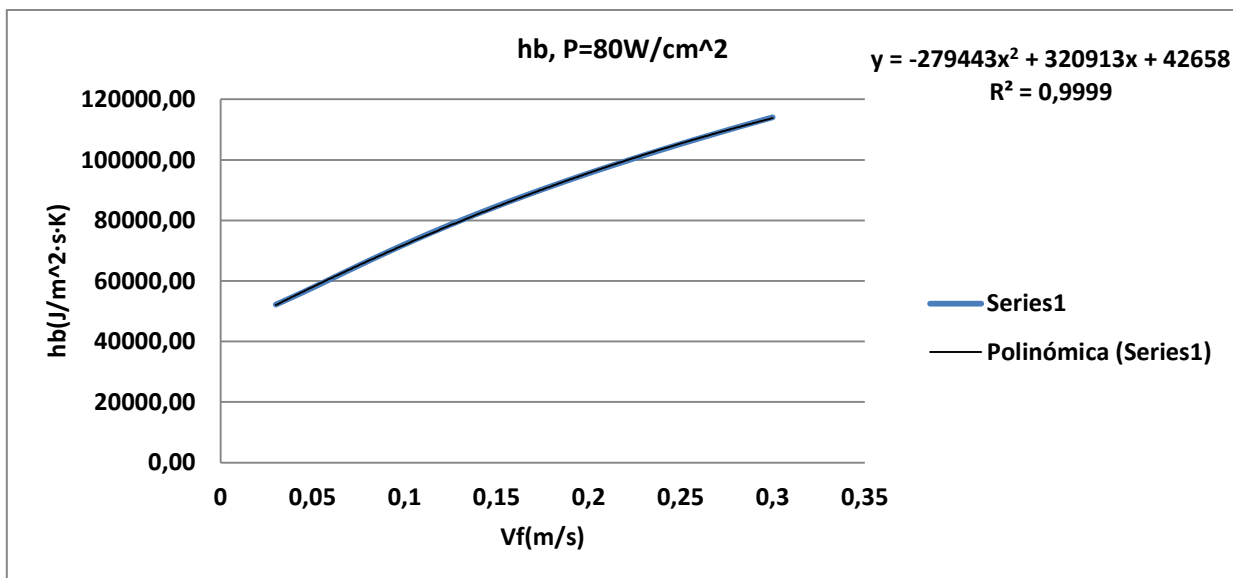


Figura 21: Curva  $h_b(v_f)$  para  $P=80 \text{ W}/\text{cm}^2$ .

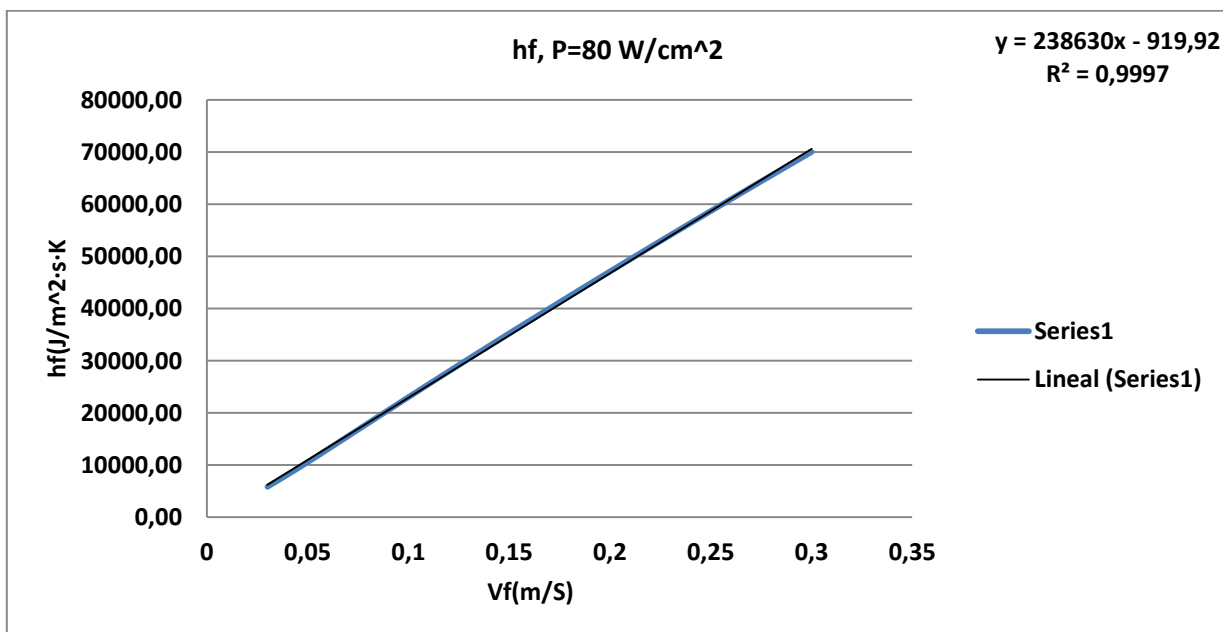


Figura 22: Curva  $h_f(v_f)$  para  $P=80 \text{ W}/\text{cm}^2$ .

-P=100 W/cm<sup>2</sup>

Qref(m <sup>3</sup> /s)	Tbase(K)	Tempfluido(K)	Tempsolido(K)	Hb(J/(m <sup>2</sup> ·s·K))	q(W/m <sup>2</sup> )	Ø(m <sup>2</sup> )	Vf(m/s)	Tin(K)	Cf·Γ/L(J/m <sup>3</sup> )	hf(J/m <sup>2</sup> ·s·K)
1,50E-08	348,60	337,40	346,10	115009,12	1000000	5E-08	0,3	323,15	233843,93	70153,18
1,42E-08	349,53	338,13	347,02	112450,68	1000000	5E-08	0,285	323,15	234280,34	66769,90
1,35E-08	350,56	338,93	348,04	109828,42	1000000	5E-08	0,27	323,15	234691,808	63366,79
1,27E-08	351,71	339,83	349,17	107138,20	1000000	5E-08	0,255	323,15	235070,73	59943,04
1,20E-08	352,99	340,85	350,43	104371,07	1000000	5E-08	0,24	323,15	235403,695	56496,89
1,12E-08	354,43	342,01	351,86	101519,84	1000000	5E-08	0,225	323,15	235677,914	53027,53
1,05E-08	356,08	343,34	353,48	98577,04	1000000	5E-08	0,21	323,15	235874,206	49533,58
9,75E-09	357,96	344,88	355,35	95537,27	1000000	5E-08	0,195	323,15	235963,55	46012,89
9,00E-09	360,16	346,70	357,52	92384,61	1000000	5E-08	0,18	323,15	235909,499	42463,71
8,25E-09	362,75	348,87	360,09	89110,52	1000000	5E-08	0,165	323,15	235664,864	38884,70
7,50E-09	365,85	351,50	363,17	85696,60	1000000	5E-08	0,15	323,15	235160,965	35274,14
6,75E-09	369,65	354,76	366,94	82128,55	1000000	5E-08	0,135	323,15	234306,408	31631,37
6,00E-09	374,42	358,92	371,68	78391,80	1000000	5E-08	0,12	323,15	232950,456	27954,05
5,25E-09	380,61	364,40	377,83	74463,18	1000000	5E-08	0,105	323,15	230877,835	24242,17
4,50E-09	388,98	371,93	386,15	70325,21	1000000	5E-08	0,09	323,15	227760,508	20498,45
3,75E-09	400,96	382,91	398,07	65974,93	1000000	5E-08	0,075	323,15	223119,508	16733,96
3,00E-09	419,45	400,20	416,48	61425,55	1000000	5E-08	0,06	323,15	216319,515	12979,17
2,25E-09	451,41	430,70	448,33	56717,74	1000000	5E-08	0,045	323,15	206622,584	9298,02
1,50E-09	518,06	495,42	514,82	51562,77	1000000	5E-08	0,03	323,15	193491,251	5804,74

Tabla 6: Resultados de COMSOL para P=100cm<sup>2</sup>

Mediante las ecuaciones (1), (2), con valores de  $U_L=20$  (W/m<sup>2</sup>) y  $T_a=298,15$ K se obtienen las siguientes gráficas para  $h_b$  y  $h_f$ .

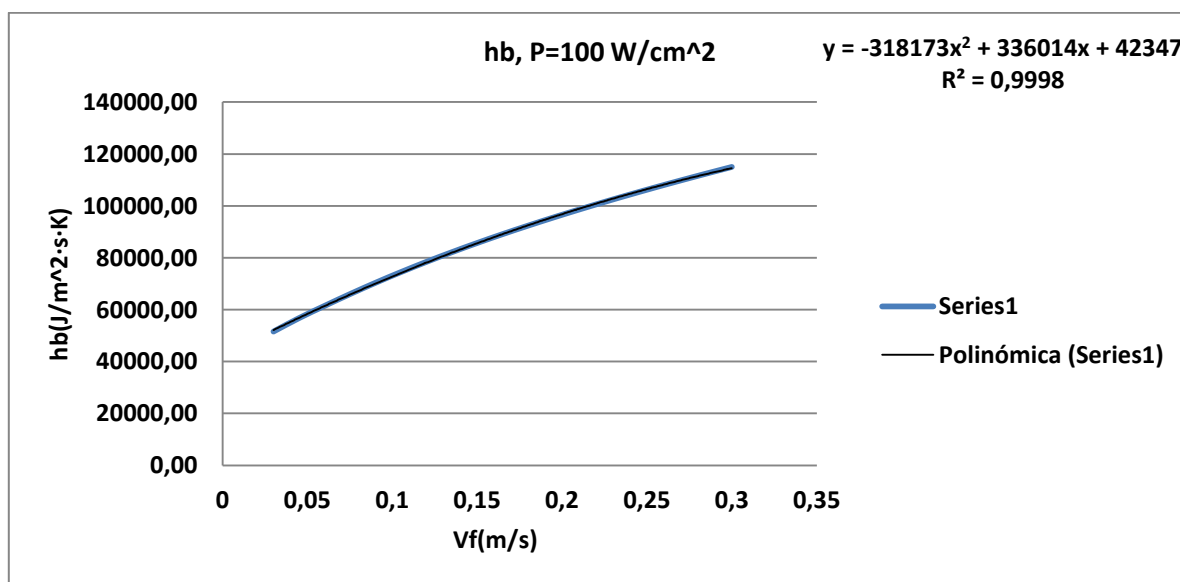


Figura 23: Curva  $h_b(v_f)$  para P=100 W/cm<sup>2</sup>.

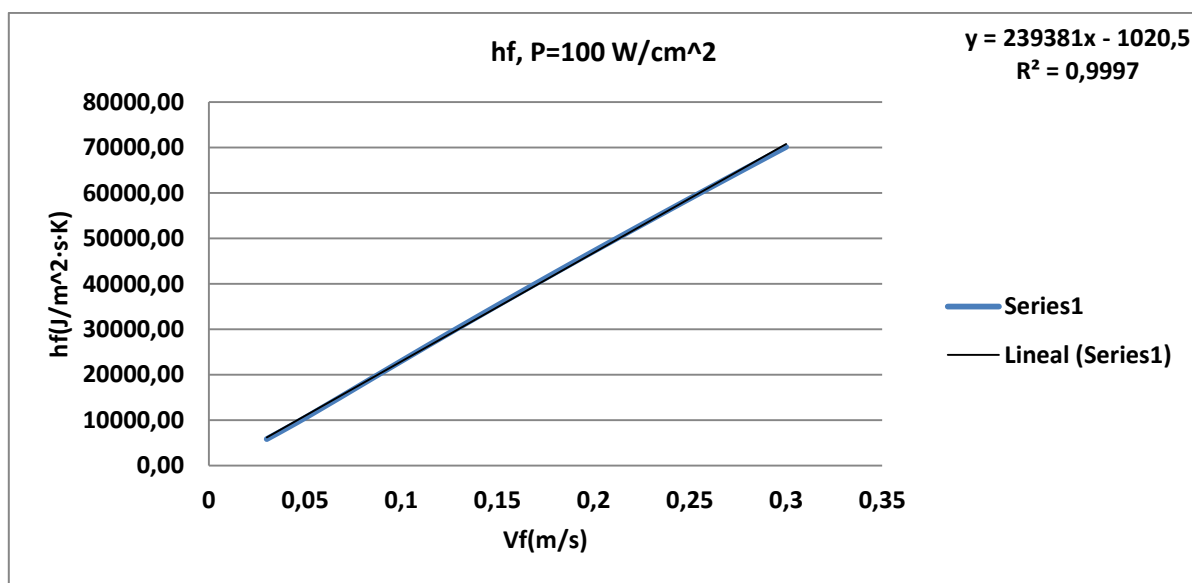


Figura 24: Curva hf(vf) para  $P=100 \text{ W/cm}^2$ .

$-P=200 \text{ W/cm}^2$

Qref(m <sup>3</sup> /s)	Tbase(K)	Tempfluido(K)	Tempsolido(K)	Hb(J/(m <sup>2</sup> ·s·K))	q(W/m <sup>2</sup> )	Ø(m <sup>2</sup> )	Vf(m/s)	Tin(K)	Cf·Γ/L(J/m <sup>3</sup> ·K)	hf(J/m <sup>2</sup> ·s·K)
1,50E-08	373,18	351,47	368,24	119290,30	2000000	5E-08	0,3	323,15	235374,17	70612,25
1,42E-08	375,02	352,92	370,05	116748,39	2000000	5E-08	0,285	323,15	235748,62	67188,36
1,35E-08	377,04	354,53	372,05	114141,81	2000000	5E-08	0,27	323,15	236081,11	63741,90
1,27E-08	379,30	356,33	374,28	111467,76	2000000	5E-08	0,255	323,15	236360,34	60271,89
1,20E-08	381,83	358,38	376,77	108718,46	2000000	5E-08	0,24	323,15	236570,75	56776,98
1,12E-08	384,68	360,70	379,59	105882,84	2000000	5E-08	0,225	323,15	236690,11	53255,27
1,05E-08	387,94	363,39	382,81	102950,54	2000000	5E-08	0,21	323,15	236687,59	49704,39
9,75E-09	391,69	366,51	386,53	99911,61	2000000	5E-08	0,195	323,15	236525,33	46122,44
9,00E-09	396,07	370,20	390,87	96746,55	2000000	5E-08	0,18	323,15	236153,09	42507,56
8,25E-09	401,27	374,62	396,02	93436,19	2000000	5E-08	0,165	323,15	235506,42	38858,56
7,50E-09	407,54	380,01	402,24	89948,40	2000000	5E-08	0,15	323,15	234495,94	35174,39
6,75E-09	415,27	386,73	409,92	86247,67	2000000	5E-08	0,135	323,15	233007,14	31455,96
6,00E-09	425,04	395,33	419,63	82301,59	2000000	5E-08	0,12	323,15	230919,52	27710,34
5,25E-09	437,78	406,67	432,29	78066,50	2000000	5E-08	0,105	323,15	228052,10	23945,47
4,50E-09	455,12	422,32	449,54	73472,03	2000000	5E-08	0,09	323,15	224078,96	20167,11
3,75E-09	480,07	445,13	474,38	68374,28	2000000	5E-08	0,075	323,15	218617,54	16396,32
3,00E-09	518,65	480,80	512,81	62478,85	2000000	5E-08	0,06	323,15	211441,23	12686,47

Tabla 7: Resultados de COMSOL para  $P=200 \text{ W/cm}^2$

Mediante las ecuaciones (1), (2), con valores de  $U_L=20$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) y  $T_a=298,15\text{K}$  se obtienen las siguientes gráficas para  $h_b$  y  $h_f$ .

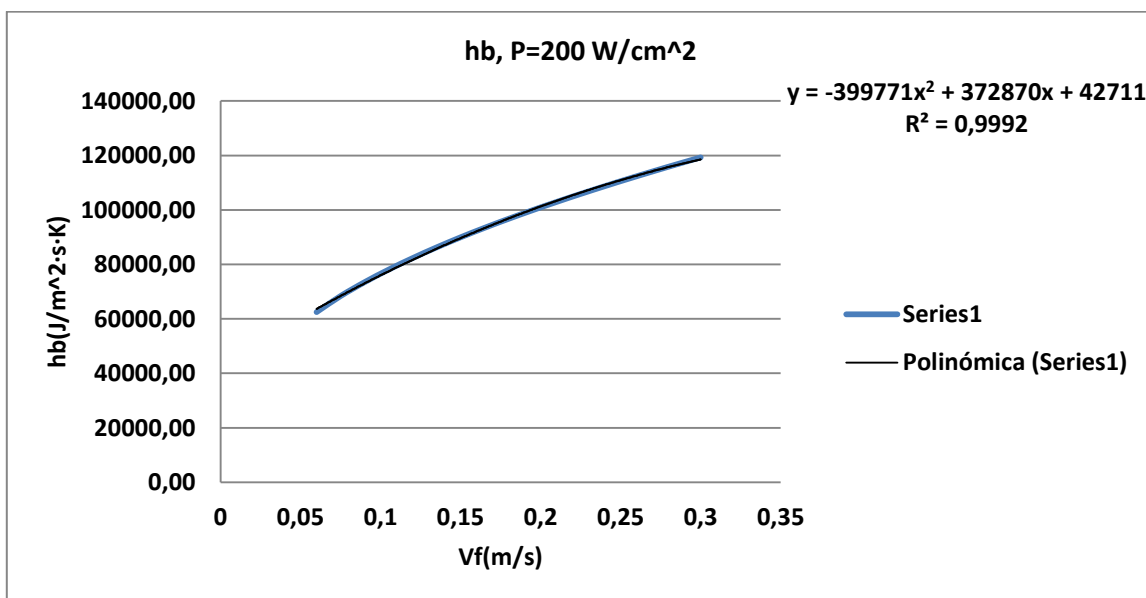


Figura 25: Curva  $h_b(v_f)$  para  $P=200 \text{ W}/\text{cm}^2$



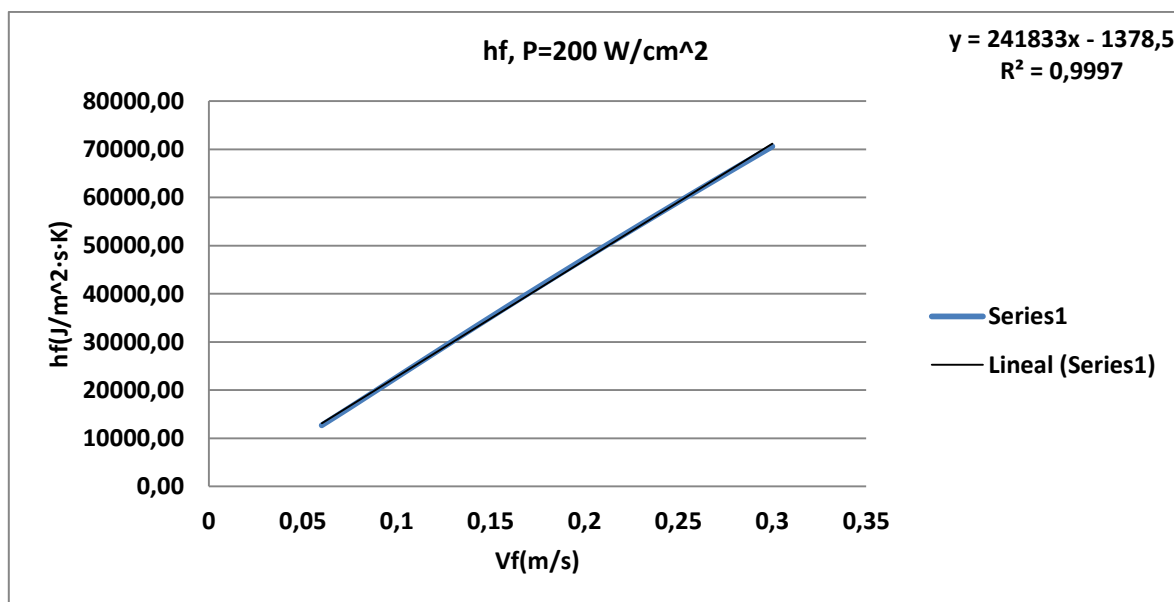


Figura 26: Curva  $hf(vf)$  para  $P=200 \text{ W/cm}^2$ .

-P=300 W/cm<sup>2</sup>

Qref(m <sup>3</sup> /s)	Tbase(K)	Tempfluido(K)	Tempsolido(K)	Hb(J/(m <sup>2</sup> ·s·K))	q(W/m <sup>2</sup> )	Ø(m <sup>2</sup> )	Vf(m/s)	Tin(K)	Cf·Γ/L(J/m <sup>3</sup> ·K)	hf(J/m <sup>2</sup> ·s·K)
1,50E-08	397,27	365,49	389,91	122858,19	3000000	5E-08	0,3	323,15	236163,71	70849,11
1,42E-08	400,00	367,67	392,62	120277,81	3000000	5E-08	0,285	323,15	236420,56	67379,86
1,35E-08	403,04	370,11	395,61	117622,26	3000000	5E-08	0,27	323,15	236611,95	63885,23
1,27E-08	406,43	372,85	398,96	114885,66	3000000	5E-08	0,255	323,15	236722,27	60364,18
1,20E-08	410,24	375,95	402,72	112058,13	3000000	5E-08	0,24	323,15	236729,81	56815,15
1,12E-08	414,55	379,50	406,99	109121,86	3000000	5E-08	0,225	323,15	236605,66	53236,27
1,05E-08	419,50	383,60	411,88	106067,22	3000000	5E-08	0,21	323,15	236319,50	49627,10
9,75E-09	425,21	388,38	417,54	102886,98	3000000	5E-08	0,195	323,15	235843,29	45989,44
9,00E-09	431,89	394,03	424,16	99564,37	3000000	5E-08	0,18	323,15	235136,57	42324,58
8,25E-09	439,82	400,80	432,03	96082,19	3000000	5E-08	0,165	323,15	234139,30	38632,98
7,50E-09	449,41	409,08	441,55	92392,24	3000000	5E-08	0,15	323,15	232758,94	34913,84
6,75E-09	461,26	419,40	453,32	88443,32	3000000	5E-08	0,135	323,15	230883,98	31169,34
6,00E-09	476,31	432,62	468,27	84156,72	3000000	5E-08	0,12	323,15	228363,26	27403,59
5,25E-09	496,04	450,11	487,89	79409,02	3000000	5E-08	0,105	323,15	225035,61	23628,74
4,50E-09	522,92	474,11	514,64	74023,78	3000000	5E-08	0,09	323,15	220809,01	19872,81

Tabla 8: Resultados de COMSOL para  $P=300 \text{ W/cm}^2$

Mediante las ecuaciones (1), (2), con valores de  $U_L=20 \text{ (W/m}^2\text{)}$  y  $T_a=298,15 \text{ K}$  se obtienen las siguientes gráficas para  $h_b$  y  $h_f$ .

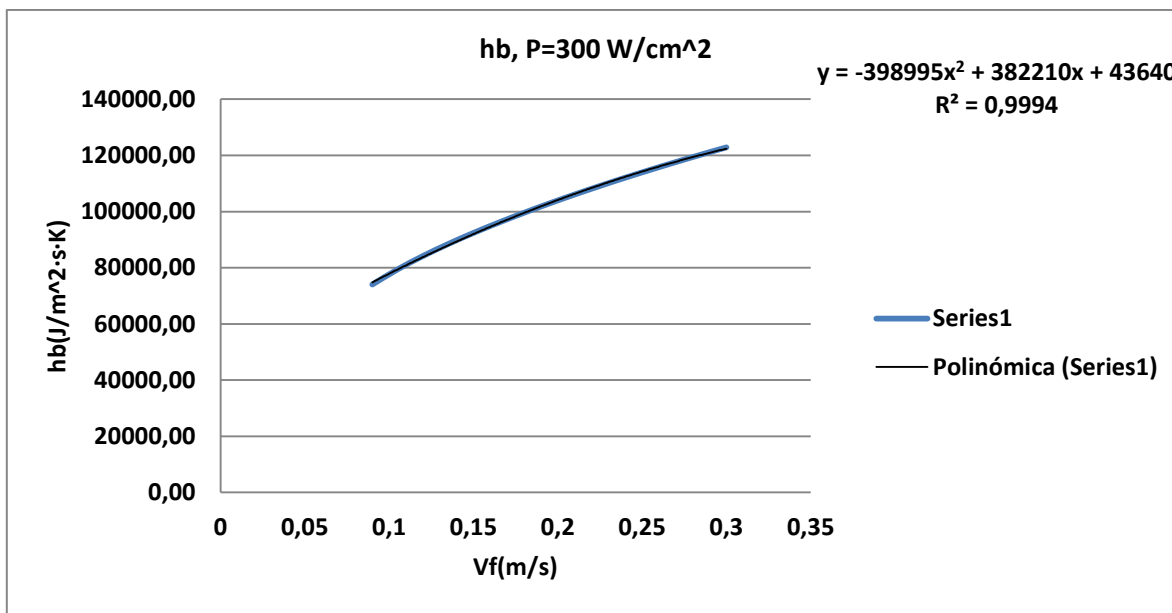


Figura 27: Curva  $hb(vf)$  para  $P=300 \text{ W/cm}^2$ .

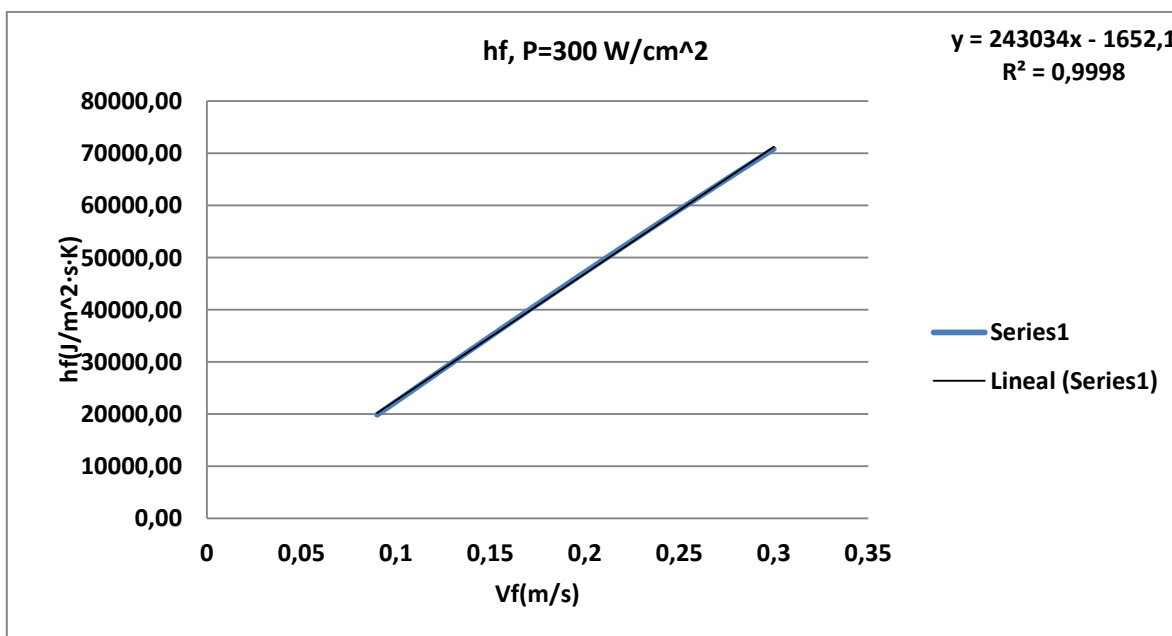


Figura 28: Curva  $hf(vf)$  para  $P=300 \text{ W/cm}^2$ .

## 11.2 Aproximación de hb

Una vez obtenidas todas las curvas hb en función de la velocidad del fluido, se comprueba si estas a su vez dependen del flujo de calor. Para ello se superponen las curvas.

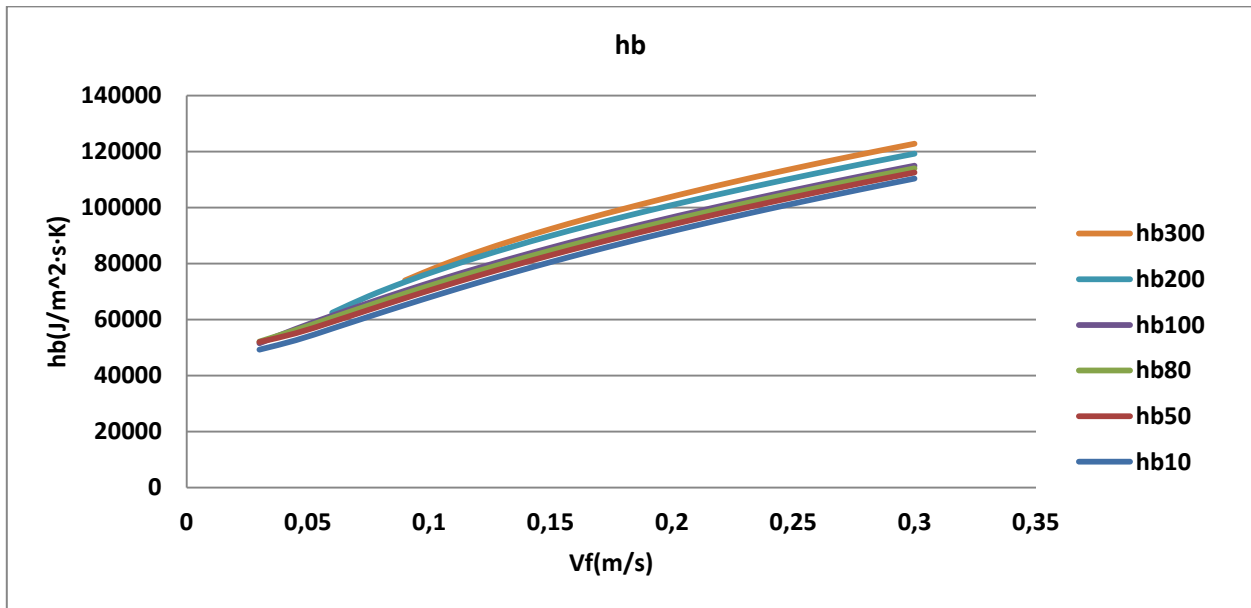


Figura 29: Coeficientes  $hb(vf)$  para cada flujo de calor.

Las curvas no son coincidentes, de hecho cuanto mayor es el flujo de calor la curva presenta valores más elevados de coeficiente de arrastre para cada velocidad del fluido, por tanto será necesario realizar una segunda regresión para cada uno de los coeficientes de las curvas  $hb$  y así obtener una única función dependiente de la velocidad del fluido así como del flujo de calor. Para aproximar el término independiente se realiza una media con todos los términos anteriores.

$q(w/m^2)$	$q(w/cm^2)$	$x^2$	$x$	1
100000	10	-241902	308366	39578
500000	50	-243901	307635	42151
800000	80	-279443	320913	42658
1000000	100	-318173	336014	42347
2000000	200	-399771	372870	42711
3000000	300	-398995	382210	43640
Valor medio				42180,8333

Tabla 9: Tabla resumen de coeficientes de las curvas

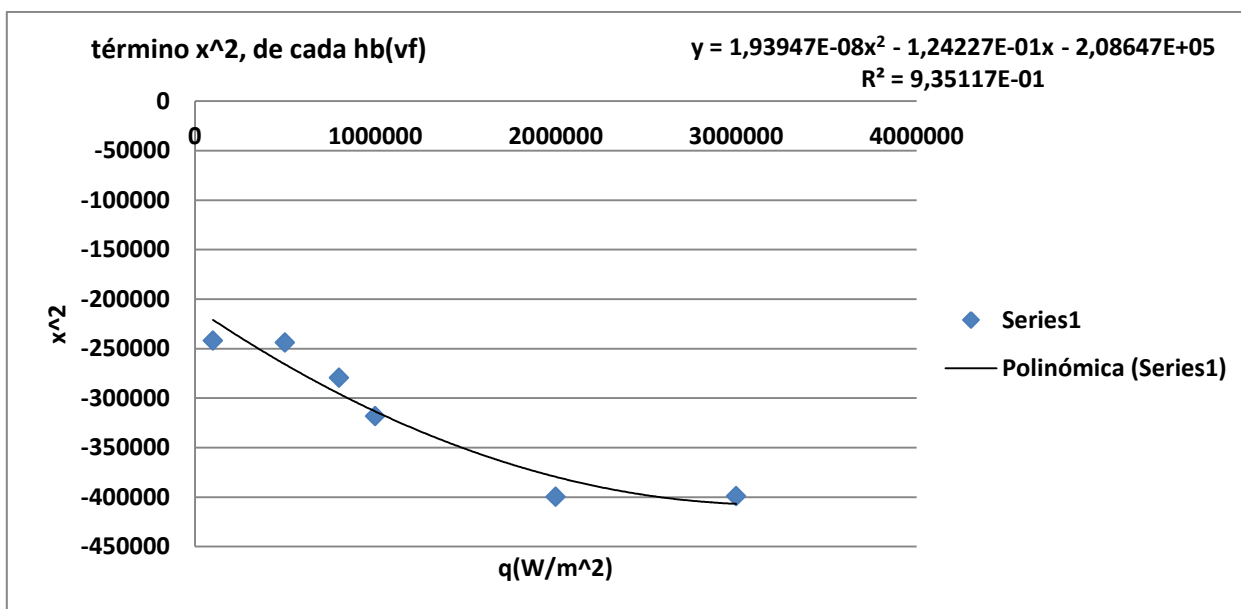


Figura 30: Representación del primer término de las curvas de cada flujo de calor.

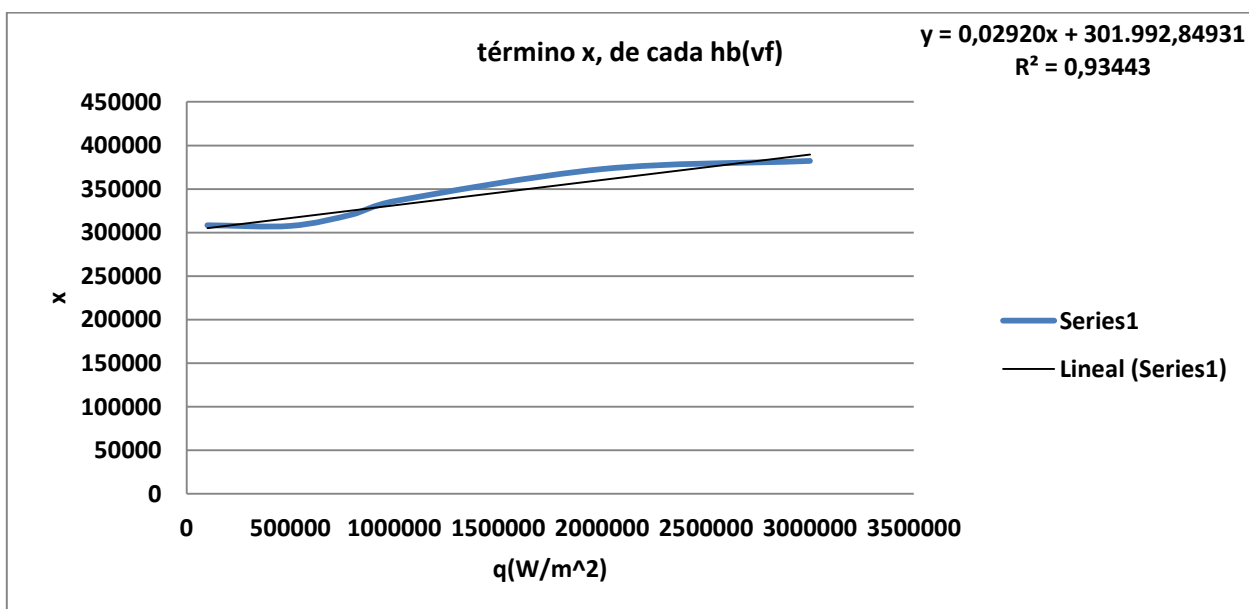


Figura 31: Aproximación del segundo término de las curvas de cada flujo de calor.

Por tanto la nueva curva del coeficiente de convección del sólido dependiente de la velocidad del fluido y flujo de calor quedará de la forma:

$$hb_{vf,q} = a_1 \cdot q^2 + a_2 \cdot q + a_3 \cdot v_f^2 + b_1 \cdot q + b_2 \cdot v_f + c_1 \quad (26)$$

Siendo los coeficientes para la misma:

Coeficientes hb					
a1	a2	a3	b1	b2	c1
1,94E-08	-1,24E-01	-2,09E+05	0,0292	301992,85	42180,833

Tabla 10: Coeficientes de la curva  $hb(vf,q)$

### 11.3 Aproximación de $hf$

Se superponen las curvas obtenidas del coeficiente de convección del fluido para cada uno de los flujos de calor.

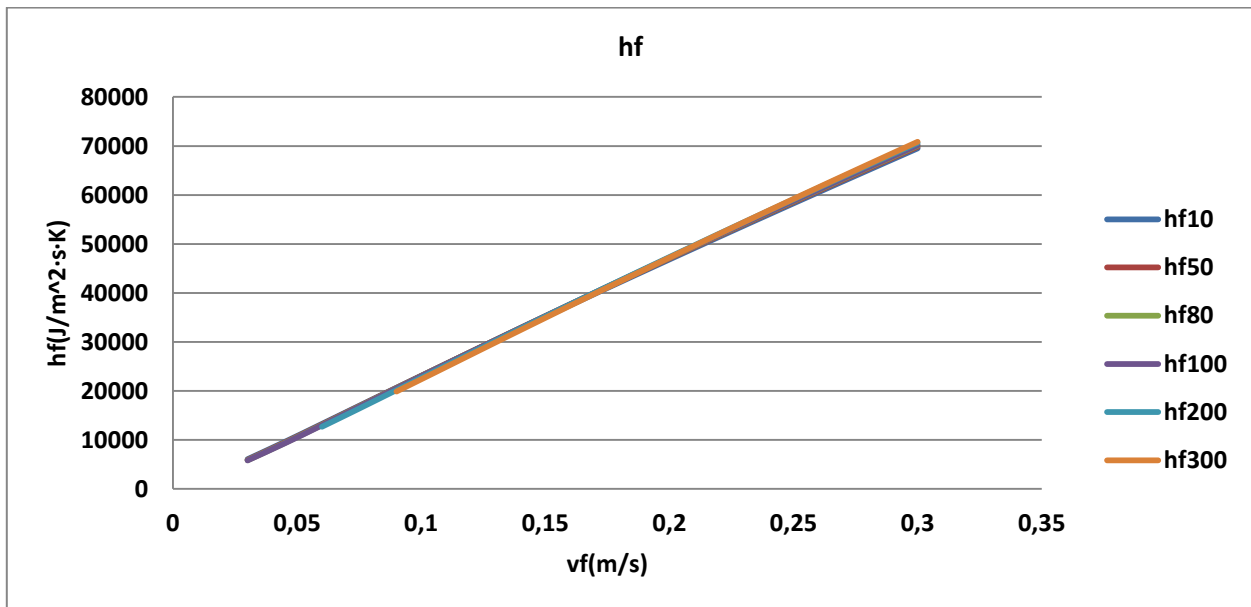


Figura 32: Representación de la curva  $hf(vf)$  de cada flujo de calor.

En este caso se observa como la aproximación de  $h_f$  para cada flujo de calor se trata de una línea recta la cual prácticamente no varía con el flujo de calor sobre el sólido, por tanto ya que las rectas pueden aproximarse como coincidentes se utiliza como expresión general para cada uno de los flujos de calor la recta obtenida para  $q=80 \text{ W/cm}^2$  por ser un valor intermedio, aunque cualquiera de las rectas sería una buena aproximación.

Por tanto la nueva curva del coeficiente de arrastre del fluido dependiente de la velocidad del fluido quedará de la forma:

$$h_f \cdot v_f = d_1 \cdot v_f + d_2 \quad (27)$$

Siendo los coeficientes para la misma:

Coeficientes $h_f$	
d1	d2
238630	-919,92

Tabla 11: Coeficientes de la curva  $h_f(v_f)$

## 12. Anejo B

### 12.1 Código VBA utilizado en la resolución

Con el fin de obtener un buen rango de trabajo no sólo se ha resuelto el problema para varios flujos de calor sino que mediante Visual Basics se han realizado varias modificaciones a la hoja de Excel con el propósito de recorrer el problema para varios parámetros.

Por tanto modificando el flujo de calor, la velocidad del fluido y la temperatura crítica se ha conseguido fijando los demás parámetros, resolver el problema y estudiar la estabilidad para un espacio de tres dimensiones con 218448 puntos.

```
Sub Solving()
```

```
W = 12
```

```
Y = 12
```

```
Z = 12
```

‘Las variables X, Y, Z se inician en 12 ya que es la primera fila del Excel donde aparecen los cálculos que se precisan.

```
b = 0
```

```
a = 0
```

```
For b = 0.1 To 1.2 Step 0.01
```

```
Cells(3, 2) = b
```

‘Se realiza un bucle del tipo “for” para recorrer la variable “b” que en este caso se corresponde a la  $v_f$ , la cual está ubicada en la celda de coordenadas (3,2).

```
For a = 305 To 320 Step 0.5
```

```
Cells(1, 2) = a
```

‘Se realiza un bucle del tipo “for” para recorrer la variable “a” que en este caso se corresponde a la  $T_{crit}$ , la cual está ubicada en la celda de coordenadas (1,2).

```
SolverReset
```

```
OBJSTRING = "$J$60"
```

‘Se utiliza la herramienta “Solver” dentro del propio Excel siendo la celda objetivo del mismo la J60.

SolverAdd CellRef:="\$B\$12:\$B\$59", Relation:=3, FormulaText:="274"

‘Durante el proceso se añade la restricción de que en ningún caso se utilizarán valores inferiores a 274K en las celdas comprendidas entre la B12 y la B59.

SolverOK SetCell:=Range(OBJSTRING), MaxMinVal:=2, ByChange:="\$B\$12:\$B\$59"

‘Para satisfacer los requisitos del problema se buscará un mínimo en la celda objetivo modificando para ello los valores del intervalo de celdas [B12,B59].

SolverSolve UserFinish:=True

For i = 12 To 59

If Cells(i, 22) < 0 Then

‘Se realiza un bucle que recorre las soluciones de diferentes flujos de calor para ver si el discriminante es igual o inferior a cero.

Cells(W, 34) = Cells(i, 1)

Cells(W, 35) = Cells(1, 2)

Cells(W, 36) = Cells(3, 2)

‘En caso de ser así, se almacena el valor del flujo de calor, de temperatura crítica y de velocidad del fluido para conocer el punto exacto que presenta estas condiciones (columnas 34, 35 y 36).

W = W + 1

If Cells(i, 22) < 0 Then Exit For

End If

‘Se sale del bucle una vez almacenado el primer valor ya que a partir del mismo todos los valores presentarán discriminante negativo y no presentan información útil para la resolución.

Next

For i = 12 To 59

If Cells(i, 21) < 0 Then



‘Se realiza un bucle que recorre las soluciones de diferentes flujos de calor para ver si el determinante es inferior a cero

Cells(Y, 38) = Cells(i, 1)

Cells(Y, 39) = Cells(1, 2)

Cells(Y, 40) = Cells(3, 2)

‘Se almacena el valor del flujo de calor, de temperatura crítica y de velocidad del fluido para conocer el punto exacto que presenta estas condiciones (columnas 38, 39 y 40).

Y = Y + 1

If Cells(i, 21) < 0 Then Exit For

‘Como en el caso anterior se sale del bucle una vez almacenado el primer valor ya que a partir del mismo todos los valores presentarán determinante negativo.

End If

Next

For i = 12 To 59

If Cells(i, 20) < 0 Then

‘Se realiza un bucle que recorre las soluciones de diferentes flujos de calor para ver si la traza es igual o inferior a cero.

Cells(Z, 42) = Cells(i, 1)

Cells(Z, 43) = Cells(1, 2)

Cells(Z, 44) = Cells(3, 2)

‘Se almacena el valor del flujo de calor, de temperatura crítica y de velocidad del fluido para conocer el punto exacto que presenta estas condiciones (columnas 42, 43 y 44).

Z = Z + 1

If Cells(i, 20) < 0 Then Exit For

‘Se sale del bucle una vez almacenado el primer valor ya que una vez se obtiene la primera traza inferior a cero los flujos de calor superiores presentarán también el valor de traza negativo y no presentan información útil para la resolución.

End If

Next

Next

Next

End Sub

## 13. Anejo C

### 13.1 Obtención de la curva de la válvula

Para determinar la válvula se ha empleado el artículo de Matthew McCarthy [3], en el cual aparecen las siguientes ecuaciones para describir la curva de la válvula:

$$\phi = \varepsilon^3 \cdot \sec \eta - 1^3 \quad (28)$$

$$\psi = \phi \theta + \theta_0 \quad (29)$$

$$\theta = \frac{4}{\pi^2} \eta^2 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 \sec \eta - 1^2 \quad (30)$$

$$\theta = \frac{\Delta T}{\Delta T_{crit}} \quad (31)$$

Donde:

-  $\varepsilon$ , es la excentricidad de la válvula.

-  $\eta$ , es la carga axial.

Se trata de ecuaciones no reversibles por tanto para la resolución del problema se realizará una aproximación de la curva de la válvula (ecuación 4).

En primer lugar para situar gráficamente la curva de la válvula se evalúan las ecuaciones anteriores (28, 29, 30 y 31) para diversos puntos.

Posteriormente se diseña otra curva de forma exponencial y se optimiza el error cuadrático entre ambas mediante los coeficientes (tabla 1) de la ecuación (4).

Una vez aproximada la ecuación de la válvula se comprobará el error entre cada una de las curvas numéricamente (tabla 12) y se representarán superpuestas para conocer el error también de forma gráfica (figura 33).

$\theta$	$\phi(\text{McCarthy})$	$\phi(\text{Aproximada})$	Error	Error relativo
0	0	0	0	
0,45898438	0,005304102	0,021312769	0,00025628	0,012024595
0,7734375	0,079561528	0,110539252	0,00095962	0,008681255
1,05078125	0,288189533	0,290624066	5,9269E-06	2,03939E-05
1,27148438	0,548090523	0,530295764	0,00031665	0,000597126
1,54882813	0,99893918	0,98818286	0,0001157	0,000117082
1,67382813	1,25	1,262326156	0,00015193	0,00012036
		Error total	0,00180611	0,021560812

Tabla 12: Comparación numérica entre la curva de McCarthy y la aproximada.

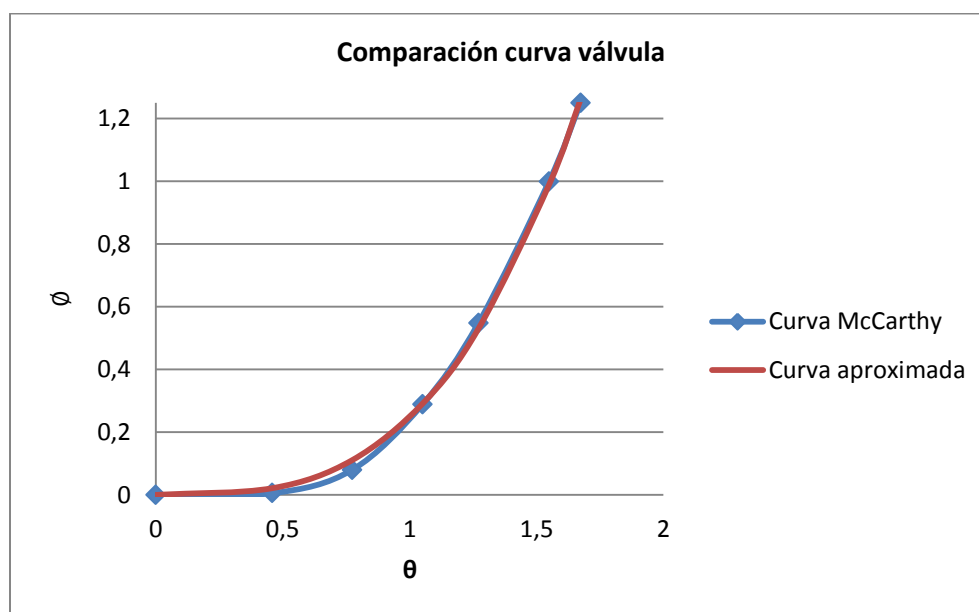
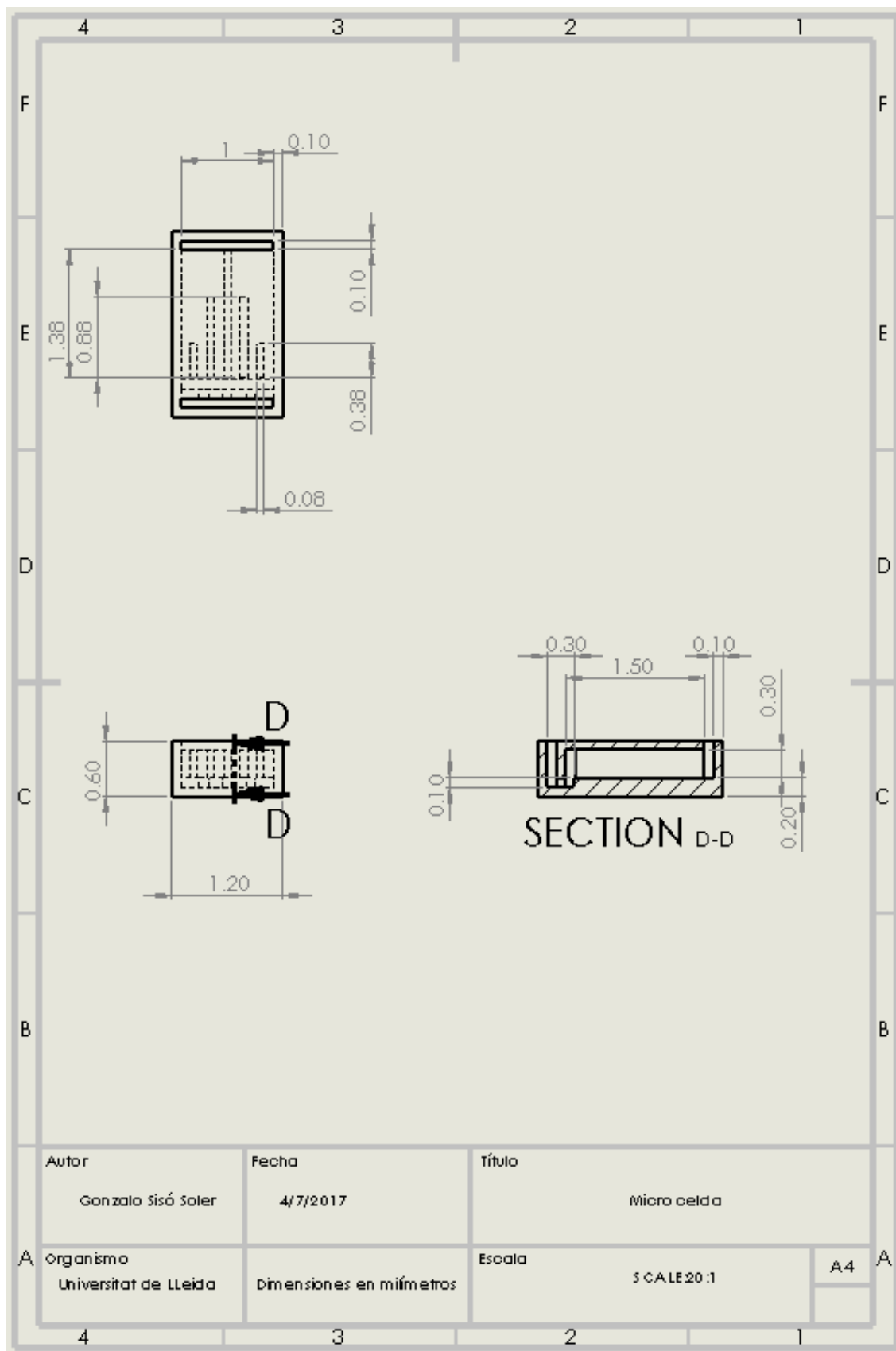


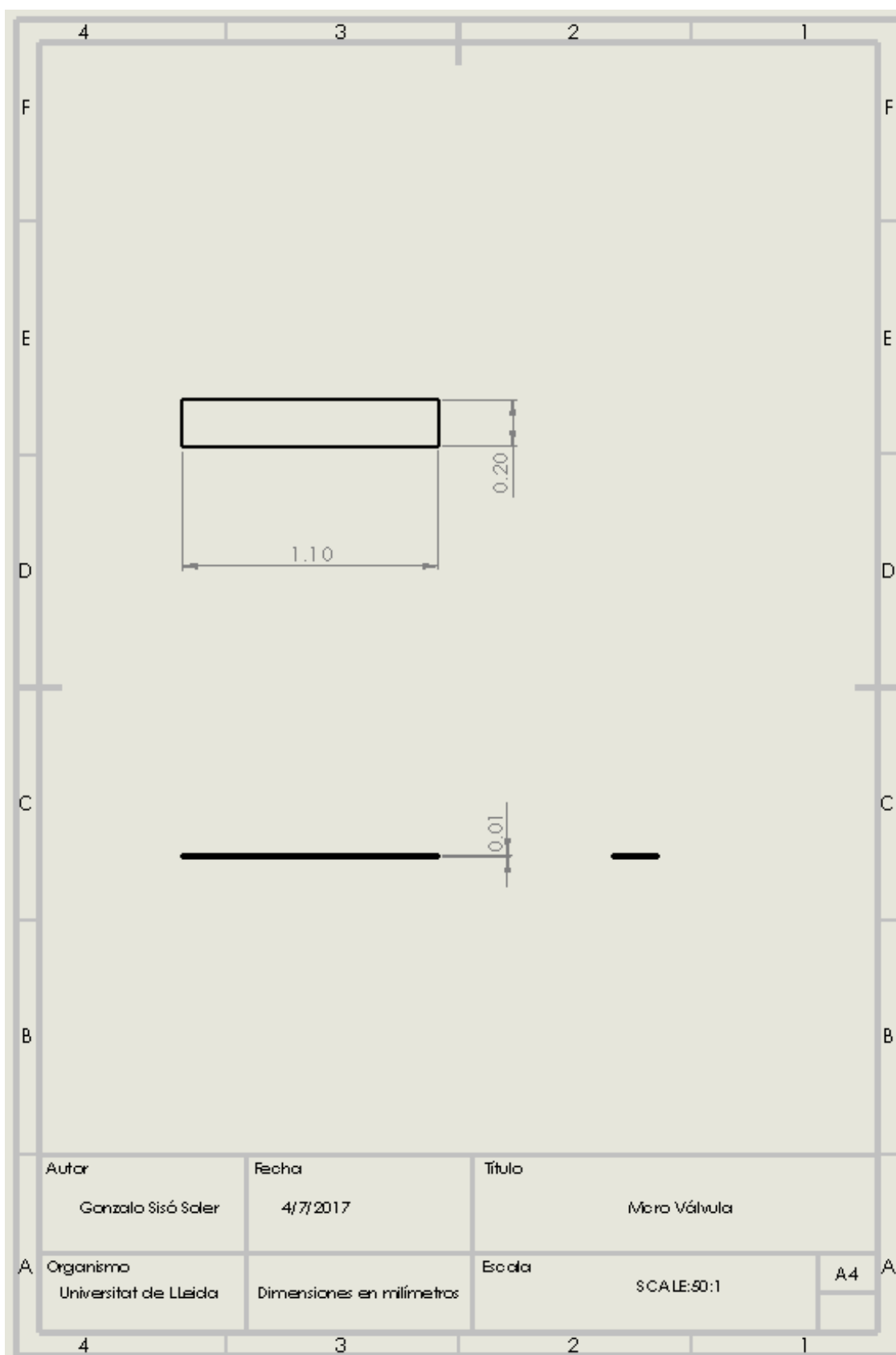
Figura 33: Superposición de la curva McCarthy con la aproximada.

## 14. Anejo D

### 14.1 Plano de la micro celda



## 14.2 Plano de la válvula



### 14.3 Plano de montaje

